Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter
(Westbau/02.007), 8047

Blatt 5

Hausaufgabe 9 Eigenschaften der Lösungen der Dirac-Gleichung

(a) Benutzen Sie die Lösungen positiver ($u(p)$) und negativer Frequenz ($v(p)$) der Dirac-Gleichung und zeigen Sie anhand der expliziten Gestalt

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p}\, \xi^s \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p}\, \xi^s \end{pmatrix}, \qquad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p}\, \xi^{-s} \\ -\sqrt{\bar{\sigma} \cdot p}\, \xi^{-s} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit

$$(\xi^r)^\dagger \xi^s = \delta_{rs}, \quad \sum_s \xi^s (\xi^s)^\dagger = \mathbb{1}, \qquad \text{z.B.} \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

sowie $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$, dass

$$\overline{u}^r(\vec{p}) v^s(\vec{p}) = 0 \tag{3}$$

sowie

$$v^{r\dagger}(-\vec{p}) u^s(\vec{p}) = 0, \qquad u^{r\dagger}(-\vec{p}) v^s(\vec{p}) = 0. \tag{4}$$

[**3 Punkte**]

(b) Bestimmen Sie die Spinsummen für die Lösungen positiver und negativer Frequenz der Dirac-Gleichung, d.h. beweisen Sie

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p) \overline{u}^s(p) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v^s(p) \overline{v}^s(p) = \not{p} - m. \tag{5}$$

[**4 Punkte**]

Hausaufgabe 10 Mehr Eigenschaften der Gamma-Matrizen

(a) Verwenden Sie in dieser Aufgabe nirgends eine explizite Darstellung der Gamma-Matrizen. Die folgenden Identitäten, speziell die Spuren der Gamma-Matrizen, werden später bei der Berechnung von Streuprozessen in der QED und QCD von Bedeutung sein.

Zeigen Sie, dass die Spur einer ungeraden Anzahl von Gamma-Matrizen verschwindet. (Fügen Sie, am besten am Anfang der Spur, eine Eins in der Form $\gamma^5 \gamma^5$ ein. Weisen Sie dafür nach, dass $(\gamma^5)^2 = 1$.) Was gilt demnach für $\mathrm{tr}\,[\gamma^\mu]$?

[**3 Punkte**]

(b) Beweisen Sie $\mathrm{tr}\,[\gamma^5] = 0$.

[**3 Punkte**]

(c) Verwenden Sie die Dirac-Algebra, um zu zeigen, dass

$$\mathrm{tr}\,[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4 g^{\mu\nu} \qquad \mathrm{tr}\,[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}). \tag{6}$$

[**5 Punkte**]

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}\left[\gamma^5\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\right] = 0$ für n ungerade.

[**2 Punkte**]

(e) Zu zeigen: $\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\right] = 0$. Das Quadrat welcher Gamma-Matrix müssen Sie hier einsetzen?

[**3 Punkte**]

(f) Berechnen Sie $\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5\right]$, indem Sie über die Symmetrie der vier Indizes argumentieren und dann eine feste Kombination einsetzen.

[**3 Punkte**]

(g) Beweisen Sie die folgenden Kontraktionsidentitäten der Gamma-Matrizen

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 \quad \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu = -2\gamma^\rho \quad \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = 4g^{\rho\sigma} \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \tag{7}$$

[**4 Punkte**]

(h) Zeigen Sie, dass die 16 Matrizen (mit S = Skalar, V = Vektor, T = Tensor, A = Axialvektor, P = Pseudoskalar)

$$\Gamma^S = \mathbb{1}, \quad \Gamma^V = \gamma^\mu, \quad \Gamma^T = \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \Gamma^A = \gamma^\mu\gamma^5, \quad \Gamma^P = \gamma^5 \tag{8}$$

eine Basis für 4×4-Matrizen bilden, d.h. dass sich jede 4×4-Matrix als Linearkombination dieser 16 Matrizen ausdrücken läßt. Fordern Sie dazu, dass die folgende Linearkombination verschwindet:

$$\sum_{i=S,V,T,A,P} \lambda^i\Gamma^i = \lambda^S\mathbb{1} + \lambda^V_\mu\gamma^\mu + \lambda^T_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \lambda^A_\mu\gamma^\mu\gamma^5 + \lambda^P\gamma^5 = 0. \tag{9}$$

Multiplizieren Sie sukzessive mit den jeweiligen Matrizen, bilden die Spur, und zeigen, dass dann notwendig alle λ's verschwinden müssen.

[**8 Punkte**]

Hausaufgabe 11 Spur mit invertierter Reihenfolge

Doch noch mal konkrete chirale Darstellung: Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^T = -\mathcal{C} \qquad \mathcal{C}\left(\gamma^\mu\right)^T\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu. \tag{10}$$

Benutzen Sie die letzte Eigenschaft, das Ergebnis von Hausaufgabe 10 a) und die Tatsache $\mathrm{tr}\left[M\right] = \mathrm{tr}\left[M^T\right]$ für beliebige Matrizen M, um zu zeigen

$$\mathrm{tr}\left[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}\right] = \mathrm{tr}\left[\gamma^{\mu_n}\ldots\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}\right]. \tag{11}$$

[**4 Punkte**]