Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter
(Westbau/02.007), 8047

Blatt 3

Präsenz-Aufgabe 2 Erzeuger und Vernichter eines komplexen skalaren Feldes (schon wieder bzw. immer noch!)

Benutzen Sie von nun an die Konvention, in welcher der Feldoperator die Gestalt

$$\phi(x) = \int \widetilde{dk} \left(a_k e^{-ikx} + b_k^\dagger e^{ikx} \right), \qquad \widetilde{dk} \equiv \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3(2E_k)} \tag{1}$$

und die Vertauschungsrelationen die Form

$$[a_k, a_p^\dagger] = (2E_k)(2\pi)^3\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \tag{2}$$

haben. Zeigen Sie damit, daß sich Erzeuger und Vernichter auf die folgende Weise aus den Feldoperatoren herausprojizieren lassen:

$$a_k = i \int d^3x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x), \qquad b_k = -i \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi^\dagger(x). \tag{3}$$

Hierbei bedeutet das Symbol $\overleftrightarrow{\partial}$

$$A \overleftrightarrow{\partial} B = A(\partial B) - (\partial A)B. \tag{4}$$

Hausaufgabe 3 Lorentz-Algebra, Vektordarstellung

Zeigen Sie, daß der Generator für die Lorentz-Transformationen in der Vektordarstellung $(M^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = i\left(g^{\alpha\mu}\delta^\nu{}_\beta - g^{\alpha\nu}\delta^\mu{}_\beta\right)$ tatsächlich die Lorentz-Algebra

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i\left(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}\right)$$

erfüllt.

[**4 Punkte**]

Hausaufgabe 4 Eigenschaften der Gamma-Matrizen

(a) Zeigen Sie darstellungsfrei, das heißt mittels der fundamentalen Relationen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbb{1}$, daß die Generatoren $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ tatsächlich die Lorentz-Algebra erfüllen.

[**4 Punkte**]

(b) Benutzen Sie im folgenden die chirale Darstellung:

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Zeigen Sie, daß diese Matrizen tatsächlich der Dirac-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbb{1}$ genügen.

[**3 Punkte**]

bitte wenden

(c) Zu zeigen: γ^0 ist hermitesch, γ^i antihermitesch.

[2 Punkte]

(d) Zeigen Sie

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu, \qquad \gamma^0(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = S^{\mu\nu}. \tag{6}$$

[4 Punkte]

(e) Die Matrix $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ wird eine wichtige Rolle spielen bei der Definition der Polarisation von Elektronen (und später in der schwachen Wechselwirkung der Elementarteilchen) Indem Sie eine Indexkombination einsetzen und dann über die Symmetrie argumentieren, zeigen Sie, daß

$$\gamma^5 = \frac{-i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma, \qquad \text{mit} \quad \epsilon^{0123} = +1 \tag{7}$$

[3 Punkte]

(f) Zu zeigen:

$$\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\right\} = 0, \qquad [\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0 \tag{8}$$

[3 Punkte]

(g) Bestimmen Sie γ^5 in der chiralen Darstellung. Welche Bedeutung haben die beiden Matrizen $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$?

[3 Punkte]