Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter
(Westbau/02.007), 8047

Blatt 2

Präsenz-Aufgabe

Heute ausnahmsweise keine Präsenzübungen. (Nachgeholte Vorlesung!)

Hausaufgabe 3 Quantisierung des komplexen skalaren Feldes

(a) Betrachten Sie ein komplexes skalares Feld mit der Wirkung

$$S = \int d^4x \left(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi\right). \tag{1}$$

Bestimmen Sie die kanonisch konjugierten Impulse zu ϕ und ϕ^* sowie die kanonischen Vertauschungsrelationen (VR). Zeigen Sie, daß der Hamiltonian gegeben ist durch

$$H = \int d^3x \left(\pi^* \pi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi\right) \tag{2}$$

Finden Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichung.

[5 Punkte]

(b) Diagonalisieren Sie den Hamiltonian (d.h. finden Sie die Eigenzustände durch Einführen von Erzeugern und Vernichtern mittels Fourier-Transformation). Warum brauchen Sie zwei Sorten von Erzeugern und Vernichtern? Zeigen Sie, daß die Theorie zwei Mengen von Teilchen der Masse m enthält.

[4 Punkte]

(c) Zeigen Sie, daß der Ladungsoperator

$$Q = \frac{i}{2} \int d^3x \left(\phi^* \pi^* - \pi \phi\right) \tag{3}$$

zeitlich erhalten ist. Welche Ladungen haben die Teilchen? (Hilfe: Leiten Sie aus $\phi' = \exp\left[iQ\alpha\right] \phi \exp\left[-iQ\alpha\right]$ die infinitesimale Transformation des Feldoperators her.)

[4 Punkte]

(d) Betrachten Sie zwei komplexe Klein-Gordon-Felder mit derselben Masse, $\phi_a, a = 1, 2$. Zeigen Sie, daß es jetzt vier erhaltene Ladungen gibt: Die Verallgemeinerung von (3) sowie

$$Q^i = \frac{i}{2} \int d^3x \left(\phi_a^* \sigma_{ab}^i \pi_b^* - \pi_a \sigma_{ab}^i \phi_b\right) \tag{4}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^i. Weisen Sie nach, daß diese drei Ladungsoperatoren der Drehimpuls-Algebra $SU(2)$ genügen. Verallgemeinern Sie auf n identische komplexe skalare Felder.

[5 Punkte]

Hausaufgabe 4 Strom der Lorentz-Invarianz

Unter infinitesimalen Lorentz-Transformationen ändern sich die Raumzeit-Koordinaten gemäß

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu, \qquad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}. \tag{5}$$

Warum muß $\epsilon_{\mu\nu}$ antisymmetrisch sein? (Hilfe: Lorentz-Invarianz!)

Ein Feld, welches kein Skalarfeld, besitzt unter Lorentz-Transformationen kein triviales Transformationsgesetz (Beispiele: Vektorfelder, Spinorfelder, Tensorfelder), sondern transformieren sich mittels einer Matrixmultiplikation der Form

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \sum_j S^{-1}_{ij}[\epsilon]\phi_j(x'), \tag{6}$$

wobei für infinitesimale Transformationen gelte

$$S[\epsilon] = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu}, \quad \text{in Komponenten: } S_{ij}[\epsilon] = \delta_{ij} + \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}_{ij}\epsilon_{\mu\nu} \tag{7}$$

Bemerkung: Das $\Sigma^{\mu\nu}$ ist spezielle sogenannte spezielle Darstellung der Lorentzgruppe, für welche Sie Beispiele in der Vorlesung nächste Woche kennenlernen werden. Explizite Form und Eigenschaften werden hier nicht benötigt.

Entwickeln Sie die transformierte Lagrangedichte um x, um den erhaltenen Noether-Strom

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = \left(x^\nu T^{\mu\lambda} - x^\lambda T^{\mu\nu}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\Sigma^{\nu\lambda}_{ij}\phi_j \tag{8}$$

abzuleiten. Was sind die erhaltenen Ladungen?

[**5 Punkte**]