Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

# Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter
(Westbau/02.007), 8047

Blatt 10

---

**Präsenz-Aufgabe 7 Feynman-Parameter**

Zeigen Sie:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1}{[ax+b(1-x)]^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \; \delta(1-x-y) \frac{1}{[ax+by]^2} \tag{1}$$

$$\frac{1}{ab^n} = \int_0^1 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \; \delta(1-x-y) \frac{ny^{n-1}}{[ax+by]^{n+1}} \tag{2}$$

$$\frac{1}{a_1 \ldots a_n} = \int_0^1 \left( \prod_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \right) \; \delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i) \frac{(n-1)!}{[a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n]^n} \tag{3}$$

$$\frac{1}{a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}} = \int_0^1 \left( \prod_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \right) \; \delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i) \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{m_i - 1}}{[\sum_{i=1}^n x_i a_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \ldots + m_n)}{\Gamma(m_1) \ldots \Gamma(x_n)} \tag{4}$$

**Hinweis:** Beweisen Sie Formel (3) mittels vollständiger Induktion.

**Präsenz-Aufgabe 8 Beta-Funktion**

Gegeben seien die Integraldarstellungen der Gamma- und der Beta-Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t \; t^{x-1} e^{-t}, \qquad B(x,y) = \int_0^1 \mathrm{d}t \; t^{x-1} (1-t)^{y-1}. \tag{5}$$

Zeigen Sie damit, dass zwischen beiden der Zusammenhang

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{6}$$

besteht.

**Hausaufgabe 18 Skalare Master-Integrale**

Zeigen Sie, dass

(a) die skalare 1-Punkt-Funktion gegeben ist durch

$$A_0(m) := \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int \mathrm{d}^D q \; (q^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} = m^2 \left[ \Delta - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 1 \right] + \mathcal{O}\left(D-4\right) \tag{7}$$

mit der Abkürzung $\Delta = \frac{2}{4-D} - \gamma_E + \log 4\pi$,

*bitte wenden*

(b) die skalare 2-Punkt-Funktion gegeben ist durch (die Definition von $a, b$ als Hilfe)

$$B_0(p, m_0, m_1) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int \mathrm{d}^D q \left\{ \underbrace{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)}_{=:\, a} \underbrace{[(q+p)^2 - m_1^2 + i\epsilon]}_{=:\, b} \right\}^{-1}$$

$$= \Delta - \int_0^1 \mathrm{d}x \, \log \left[ \frac{x^2 p^2 - x(p^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right] + \mathcal{O}(D-4) \quad (8)$$

(c) folgende Symmetrie gilt: $B_0(p^2, m_0, m_1) = B_0(p^2, m_1, m_0)$,

(d) folgender Spezialfall gilt:

$$B_0(p^2, 0, m) = \Delta - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 2 + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \log\left(\frac{m^2 - p^2 - i\epsilon}{m^2}\right), \quad (9)$$

(e) der Zusammenhang

$$A_0(m) = m^2 B_0(0, 0, m) = m^2(B_0(0, m, m) + 1) \quad (10)$$

$$B_0(m^2, 0, m) = B_0(0, m, m) + 2\,. \quad (11)$$

gilt.

(f) Berechnen Sie die Spezialfälle $B_0(0, 0, m)$, $B_0(m^2, 0, m)$ und $B_0(p^2, 0, 0)$.

**[19 Punkte]**

## Hausaufgabe 19 Tensorintegral

Drücken Sie das Tensorintegral

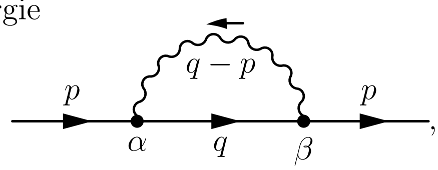
$$B_1(p, m_0, m_1) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int \mathrm{d}^D q \, \frac{q_\mu}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)[(q+p)^2 - m_1^2 + i\epsilon]} \quad (12)$$

durch die skalaren Integrale der vorangehenden Aufgabe aus. Betrachten Sie den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$.

**[5 Punkte]**

## Hausaufgabe 20 Anwendung: Elektronselbstenergie

Berechnen Sie die Elektronselbstenergie




, (13)

indem Sie sie durch die Masterintegrale der obigen Aufgaben ausdrücken.

**[10 Punkte]**