Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter

(Westbau/02.007), 8047

Blatt 1

Präsenz-Aufgabe 1 Harmonischer Oszillator; Erzeuger/Vernichter-Gymnastik

Hamiltonian des harmonischen Oszillators:

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \qquad [a, a^\dagger] = 1. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie $[a^\dagger a, a^\dagger]$ und $[a^\dagger a, a]$. Zeigen Sie, daß $a^\dagger |n\rangle$ EV von $a^\dagger a$ zum EW $(n+1)$ sowie daß $a|n\rangle$ (für $a|n\rangle \neq 0$) EV zu $a^\dagger a$ zum EW $(n-1)$ ist.

(b) Bestimmen Sie $[a^\dagger a, (a^\dagger)^n]$, $[a^\dagger a, a^n]$ und die Normierung der Eigenzustände.

(c) Zeigen Sie:

$$e^{\lambda a^\dagger a} a^\dagger e^{-\lambda a^\dagger a} = a^\dagger e^{\lambda}, \qquad e^{\lambda a^\dagger a} a e^{-\lambda a^\dagger a} = a e^{-\lambda}. \tag{2}$$

Hinweis: Ableitung beider Seiten nach $\lambda \in \mathbb{R}$, Satz von der Eindeutigkeit linearer Differentialgleichungen.

(d) Bestimmen Sie die Erzeuger und Vernichter im Heisenbergbild, einmal durch explizite Transformation, sowie durch Lösung der Heisenbergschen Bewegungsgleichugen (für einen bel. Operator $\mathcal{O}$):

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = [H, \mathcal{O}]. \tag{3}$$

Hausaufgabe 1 Zwei komplexe skalare Felder

Die Lagrangedichte für zwei komplexe skalare Felder Φ_1, Φ_2 sei gegeben durch

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} \partial_\mu \Phi_i^* \, \partial^\mu \Phi_i - m^2 \sum_{i=1}^{2} \Phi_i^* \Phi_i - \frac{\lambda^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{2} \Phi_i^* \Phi_i \right)^2 .$$

(a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen? Nehmen Sie ϕ und ϕ^* als die elementaren dynamischen Felder (es wäre auch möglich, Real- und Imaginärteil von ϕ zu wählen, so ist's aber einfacher!).

[4 Punkte]

(b) Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}$ invariant ist unter der infinitesimalen Transformation

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi_i' = \Phi_i + i\epsilon_a \frac{\sigma_{ij}^a}{2} \Phi_j \, ,$$

wobei σ^a die üblichen Paulimatrizen mit den Vertauschungsrelationen $[\sigma^a, \sigma^b] = i\epsilon^{abc}\sigma^c$ sind. ϵ^a sind konstante reelle Parameter. Wie lauten die zugehörigen erhaltenen Ströme?

[6 Punkte]

(c) Zeigen Sie unter Verwendung der Feldgleichungen, daß in der Tat $\partial^\mu j_\mu^a = 0$ gilt.

[3 Punkte]

(d) Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$.

[4 Punkte]

Hausaufgabe 2 Maxwell-Gleichungen

(a) Das klassische elektromagn. Feld ohne äußere Quellen besitzt die Wirkung:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \text{wobei } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4}$$

der Feldstärketensor ist. Leiten Sie die Maxwell-Gleichungen aus den Euler-Lagrange-Gleichungen aus obiger Wirkung her, indem Sie $A_\mu(x)$ als die dynamischen Felder ansehen. Schreiben Sie das Ergebnis mittels $E^i = F^{i0}$ und $\epsilon^{ijk} B^k = -F^{ij}$ in die Standardform um. Wie sieht die Wirkung mit äußeren Quellen (Ladungs- und Stromdichte) aus?

[8 Punkte]

(b) Konstruieren Sie den Energie-Impuls-Tensor. Nach der üblichen Prozedur wird sich dieser als nicht symmetrisch herausstellen. Man kann aber einen neuen Energie-Impuls-Tensor einführen der Form

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^\lambda K_{\lambda\mu\nu}, \tag{5}$$

wobei $K_{\lambda\mu\nu}$ antisymmetrisch in seinen ersten beiden Indizes ist. Dann ist der neudefinierte Energie-Impuls-Tensor automatisch divergenzfrei (warum?) und ergibt auf die gleiche Weise erhaltene Energie und Impuls wie der ursprüngliche. Zeigen Sie, daß die Wahl

$$K_{\lambda\mu\nu} = F_{\mu\lambda} A_\nu \tag{6}$$

zu einem symmetrischen Energie-Impuls-Tensor führt und die Standardform für Energiedichte und Poynting-Vektor des elektromagnetischen Feldes ergibt:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right), \qquad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}. \tag{7}$$

[6 Punkte]