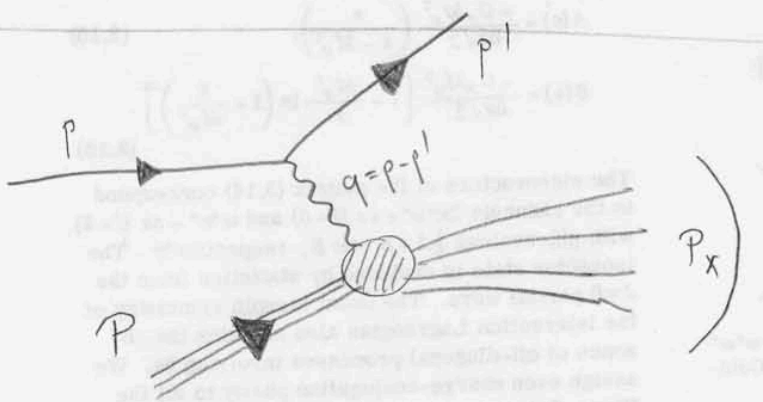
OPE am Beispiel von DIS



tiefinelastische Lepton-Nukleon-Streuung; erfolgt über Kopplung der em. Ströme der Leptonen und der Hadronen.

Der Wirkungsquerschnitt ist der folgende:
(fixed-target-Experiment).

$$d\sigma = \frac{1}{\underbrace{2E_A}_{E}\,\underbrace{2E_B}_{m_p}\,\underbrace{|v_A - v_B|}_{=1}} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} \sum_X |\mathcal{M}(p,P \to p',P_X)|^2 (2\pi)^4 \cdot \delta^4(p+P-p'-P_X)$$

$$d\sigma = \frac{1}{8EE'm_p} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \sum_X |\mathcal{M}(p,P \to p',P_X)|^2 \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta^4(p+P-p'-P_X)$$

$$\mathcal{M} = \langle e | J_\mu(0) | e' \rangle \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \langle P | J_\nu(0) | X \rangle$$

Ortsargumente der Ströme herausgezogen mittels Translationsinvarianz, stecken in der Impulserhaltenden Delta-Distribution.

übl. Prozeß: Summieren, Spin mitteln, Hermitezität der Ströme.

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} \langle e | J_\mu(0) | e' \rangle \langle e' | J_\nu(0) | e \rangle$$

$$= 2e^2 \left(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}(pp') \right) =: L_{\mu\nu} \cdot e^2$$

↑ Leptonentensor

---

definiere Hadronen-Tensor für die hadronische Seite; besitzt keine so einfache Struktur wegen der Struktur (haha!) der hadronischen Teilchen.

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{Spin} \\ \text{des} \\ \text{Protons}}} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(P_X - P - \overbrace{p - p'}^{q}) \langle P | J_\mu(0) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | P \rangle$$

$$=: e^2 \cdot H_{\mu\nu}(P, q) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{Spin} \\ \text{des} \\ \text{Protons}}} \int d^4x \, e^{iqx} \langle P | J_\mu(x) J_\nu(0) | P \rangle$$

---

em. Strom ist erhalten: $\partial_\mu J^\mu = 0$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_\mu H^{\mu\nu} = q_\nu H^{\mu\nu} = 0.}$$

Dies sieht man nach einer Fourier-Trafo:

$$H_{\mu\nu}(P, q) = \sum_X \int d^4x \, e^{i(P+q-P_X)x} \langle P | J_\mu(0) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | P \rangle$$

$$= \sum_X \int d^4x \, e^{iqx} \langle P | J_\mu(x) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | P \rangle$$

$$= \sum_X \mathrm{FT.} \left[\langle P | J_\mu(x) | X \rangle \right]_q \langle X | J_\nu(0) | P \rangle$$

Die Symmetrie ist klar, weil die Delta-Distribution auch auf den anderen Strom hätte angewendet werden können. (2)

$$\Rightarrow \boxed{H_{\mu\nu}(P, q) = H_{\nu\mu}(P, q)}$$

$$\boxed{H_{\mu\nu}(P,q) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) W_1\left(Q^2, \frac{1}{x}\right) + \left(P_\mu + \frac{q_\mu}{2x}\right)\left(P_\nu + \frac{q_\nu}{2x}\right) W_2\left(Q^2, \frac{1}{x}\right)}$$

Die Paritätserhaltung verbietet einen Term $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho q^\sigma$.

$$Q^2 = -q^2, \quad \nu = P\cdot q, \quad \boxed{x = \frac{Q^2}{2\nu}}$$

unterschiedliche Dimensionen von W_1 und W_2!

Einsetzen in Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{d^3\sigma = \frac{1}{8EE'm_p}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{e^4}{q^4}\cdot L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}}$$

$\circledast$ $q^\mu_p\left(p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(pp')\right)$
$= (p'q)p_\nu + (pq)p'_\nu - (pp')q_\nu$
$= (pp')p_\nu - (pp')p'_\nu - (pp')(p-p')_\nu$
$+ O(m_e^2) = 0$

$L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = ?$ wegen Stromerhaltung gilt auch für den Leptonentensor $L_{\mu\nu}q^\mu = q^\nu L_{\mu\nu} = 0$; expliziter Beweis $\circledast$

$$\Rightarrow 2\left(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}(pp')\right)\cdot(-g^{\mu\nu})$$
$$= -4(pp') + 8(pp') = 4(pp') =: A$$

$$2P_\mu P_\nu\left(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}(pp')\right) = 4(pP)(p'P) - \underbrace{2m_p^2(pp')}$$

wird im folgenden vernachlässigt, Hochenergiegrenzfall.

$$\simeq 4(pP)(p'P) =: B$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad q^4 = Q^4$$

$$d^3\sigma = \frac{1}{4EE'm_p}\frac{d^3p'}{\pi}\frac{\alpha^2}{Q^4}L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$$

$d^3p' = d\phi\, d(\cos\theta)\, |p'|^2\, d|p'|$, integriere über Azimuth.

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{d(\cos\theta)\,d|p'|} = \frac{1}{2EE'm_p}|p'|^2\frac{\alpha^2}{Q^4}L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}}$$

$|p'| = E'$

$$= \frac{E'}{E}\frac{\alpha^2}{2Q^4 m_p}\left(A\cdot W_1\left(Q^2,\frac{1}{x}\right) + B\cdot W_2\left(Q^2,\frac{1}{x}\right)\right)$$

definir $y = \frac{Q^2}{sx}$; $s = (P+p)^2 = \underbrace{m_p^2 + m_e^2}_{\simeq 0} + 2Pp$.

$$x = \frac{Q^2}{2\nu} = \frac{Q^2}{2P\cdot q} = \frac{2EE'(1-\cos\theta)}{2m_p(E-E')} = \frac{EE'(1-\cos\theta)}{m_p(E-E')}$$

$$y = \frac{2P\cdot q}{s} = \frac{2P\cdot q}{2P\cdot p} = \frac{m_p(E-E')}{m_p \cdot E} = \frac{E-E'}{E}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \frac{d^2\sigma}{dE'\,d(\cos\theta)} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(E',\cos\theta)}\right|^{-1}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(E',\cos\theta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{Ex}{2(E-E')} & -\frac{1}{E} \\ -\frac{EE'}{m_p(E-E')} & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{E'}{m_p(E-E')} = \frac{E'}{m_p y \cdot E}$$

$$\frac{\partial x}{\partial E'} = \frac{E(1-\cos\theta)m_p(E-E') + m_p EE'(1-\cos\theta)}{m_p^2(E-E')^2}$$

$$= \frac{E^2(1-\cos\theta)}{m_p(E-E')2} = \frac{Ex}{2(E-E')}$$

$$\frac{\partial x}{\partial(\cos\theta)} = -\frac{EE'}{m_p(E-E')}, \quad \frac{\partial y}{\partial E'} = -\frac{1}{E}; \quad \frac{\partial y}{\partial(\cos\theta)} = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \frac{m_p y}{m_p 2} \cdot \frac{E}{E'} \cdot \frac{E'}{E} \left(\frac{\alpha^2}{Q^4}\right) \left(A \cdot W_1\left(Q^2, \frac{1}{x}\right) + B \cdot W_2\left(Q^2, \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$A = 4(pp') = 2xys$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-q^2}{2P\cdot q} = \frac{2(Pp')}{2P\cdot q} \\ s &\approx 2(pP) \\ y &= \frac{2P\cdot q}{2P\cdot p} \end{aligned}\right\} \Rightarrow xy = \frac{2(pp')}{2(Pp)} \Rightarrow xys = 2(pp')$$

$$B = 4(pP)(p'P) = s^2(1-y)$$

$$1-y = 1 - \frac{2Pq}{2Pp} = \frac{2P(p-q)}{2Pp} = \frac{2(Pp')}{2(Pp)}$$

$$\Rightarrow s^2(1-y) = 4(pP)(p'P)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \left(\frac{\alpha^2 y}{2Q^4}\right)\left(s^2(1-y)\cdot W_2\left(Q^2, \frac{1}{x}\right) + 2xys\, W_1\left(Q^2, \frac{1}{x}\right)\right)}$$

Man kann den Hadronentensor auf folgende Weise umschreiben; für den uns interessierenden Bereich gilt:

$$W = \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_X - p + q) \langle p | J_\nu(0) | X \rangle \langle X | J_\mu(0) | p \rangle \quad (*)$$

mit der Impulserhaltung: $p = p_X + q$, weil der hadronische Endzustand mit Baryonenzahl 1 ~~des~~ bei hohen Impulsüberträgen nicht das leichte Proton erzeugen kann.

$$(*) \Rightarrow \quad W = \sum_X \int d^4x \, e^{iqx} \langle p | J_\nu(0) | X \rangle \langle X | J_\mu(x) | p \rangle$$

$$\Rightarrow \quad W = \int d^4x \, e^{iqx} \langle p | J_\nu(0) J_\mu(x) | p \rangle \Rightarrow$$

in dem für DIS relevanten energetischen Bereich kann man auch definieren:

$$\boxed{H_{\mu\nu}(p, q) = \int d^4x \, e^{iqx} \langle p | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | p \rangle}$$

Benutze nun das Optische Theorem:

$S^+S = \mathbb{1}, \quad S = \mathbb{1} + iT \Rightarrow$

$$\mathbb{1} = (\mathbb{1} - iT^+)(\mathbb{1} + iT) = \mathbb{1} - i(T^+ - T) + T^+T$$

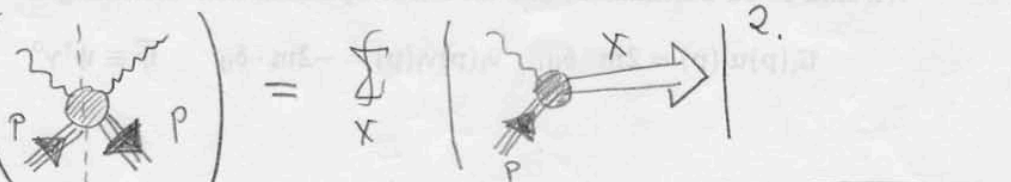
$$\Rightarrow \quad -i(T - T^+) = T^+T \qquad \langle p | \ldots | p \rangle$$

$$\Rightarrow \quad -i\langle p|T|p\rangle + i\langle p|T^+|p\rangle = \langle p|T^+T|p\rangle$$

$$= \sum_X \langle p|T^+|X\rangle\langle X|T|p\rangle$$

$$\Rightarrow \quad 2 \, \mathrm{Im}\, \mathcal{M}(p \to p) = \sum_X |\mathcal{M}(p \to X)|^2, \quad \text{diagrammatisch:}$$

$$2 \, \mathrm{Im}\left(\right) = \sum_X \left| \right|^2 .$$



Der Übergang zum Kommutator ist nicht zwingend erforderlich, man kann auch direkt das optische Theorem anwenden, s. Peskin/Schroeder.
Es ist allerdings eine explizite Entwicklung des Kommutators möglich, s. Itzykson/Zuber.

Alternative Beschreibung (s. Weinberg):

$$T^{\mu\nu}_p(P,q) := \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) T_1(Q^2, \tfrac{1}{x}) + \left(P_\mu + \frac{q_\mu}{2x}\right)\left(P_\nu + \frac{q_\nu}{2x}\right) W_2(Q^2, \tfrac{1}{x})$$

$$e^2 T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{Spin} \\ \text{des Protons}}} \int d^4x\, e^{iqx} \langle P | T\left[J_\mu(x) J_\nu(0)\right] | P \rangle$$

Zusammenhang über Dispersionsrelation:

$$T_{1/2}(\nu, Q^2) = \frac{1}{2} W_{1/2}(-\nu, Q^2) + \frac{1}{2} W_{1/2}(\nu, Q^2) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} d\nu' \frac{W_{1/2}(-\nu', Q^2) - W_{1/2}(\nu', Q^2)}{\nu' - \nu}$$

$$= \frac{1}{2} W_{1/2}(-\nu, Q^2) + \frac{1}{2} W_{1/2}(\nu, Q^2) + \frac{1}{2\pi i} \int_{Q^2/2m_p}^{\infty} d\nu' \, W_{1/2}(\nu', Q^2) \left(\frac{1}{\nu' + \nu} + \frac{1}{\nu' - \nu}\right)$$

die mithilfe aus der Identität

$$\frac{1}{\nu \pm i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{\nu}\right) \mp i\pi \delta(\nu) \text{ stammt.}$$

↑ Christ, Haßlacher, Müller (1972)

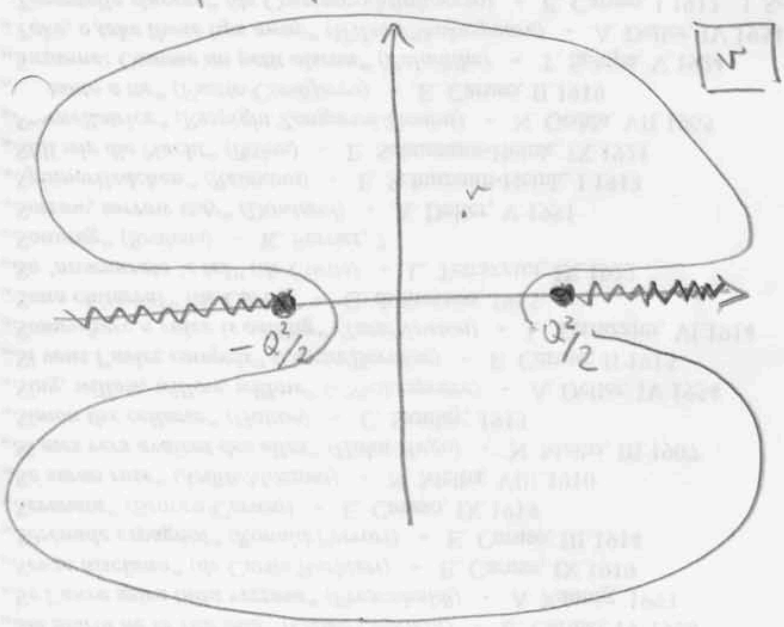
Endlich.

(ungefähre)
Herleitung der Dispersionsrelation:

Laplace-Transformation der avancierten und retardierten Greenfunktionen, deren Differenz dann die zeitgeordnete Greenfunktion bildet.

Entwicklung des Strom-Korrelators $T_{\mu\nu}$ nach seiner Tensorstruktur. z.B. T_2

$Q^2 > 0$, Q^2 fest $\Rightarrow$ T_i $i = 1,2,(3)$ analytisch in der ν-Ebene,



$$\nu = \pm \frac{Q^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{Q^2}{2\nu} = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm 1.$$

Der physikalische Bereich ist $\nu > \frac{Q^2}{2} \Leftrightarrow x < 1$.

Der physikalische Streuprozeß äußert sich als ein Schnitt in den Strukturfunktionen T_2.

Diskontinuität über den Schnitt:

$$\text{disc} = 2i \cdot \text{Im}\, T_2.$$

$$T^{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{-iqx} \langle p | T[J^\mu(x) J^\nu(0)] | p \rangle$$

invariant unter $(q,\mu) \leftrightarrow (-q,\nu)$

$\Rightarrow W_2(-\nu, Q^2) = W_2(\nu, Q^2)$

$\Rightarrow$ Schnitt symmetrisch zur y-Achse.

2. Schnitt entspricht u-Kanal.
1. Schnitt ist t-Kanal.

$$T_{\mu\nu}\Big|^{\nu+i\varepsilon}_{\nu-i\varepsilon} = (4\pi)\, W_{\mu\nu} \qquad (\nu>0)$$

$$T_{\mu\nu}\Big|^{\nu-i\varepsilon}_{\nu+i\varepsilon} = (4\pi)\, \overline{W}_{\nu\mu} \qquad (\nu<0).$$

(In $\overline{W}_{\mu\nu}$ ist J durch das hermitisch konjugierte J^+ ersetzt).

Satz v. Cauchy: $$T_i(Q^2,\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\, T_i(Q^2,\nu').$$

Der Weg $\mathcal{C}$ umschließe den Punkt ν.

Zeitgeordnetes Produkt:

$$T\left[J^+_\mu(0), J_\nu(x)\right] = \theta(-x^0)\left[J^+_\mu(0), J_\nu(x)\right] + J_\nu(x)\, J^+_\mu(0)$$
$$= -\theta(x^0)\left[J^+_\nu(0), J_\nu(x)\right] + J^+_\nu(0)\, J_\nu(x)$$

$$\mathcal{G}^A(E) = \int d^4x\ \theta(-x^0)\ \langle\alpha|\left[J^+_\nu(0), J_\nu(x)\right]|\alpha\rangle\, e^{-iE\ell\cdot x} + \text{ETC}$$

$$\mathcal{G}^R(E) = -\int d^4x\ \theta(x^0)\ \langle\alpha|\left[J^+_\nu(0), J_\nu(x)\right]|\alpha\rangle\, e^{-iE\ell\cdot x} + \text{ETC}$$

$$\mathcal{G}_+(E) = \int d^4x\ \langle\alpha|\, J_\nu(x)\, J^+_\mu(0)\,|\alpha\rangle\, e^{iE\ell\cdot x}$$

$$\mathcal{G}_-(E) = \int d^4x\ \langle\alpha|\, J^+_\mu(0)\, J_\nu(x)\,|\alpha\rangle\, e^{-iE\ell\cdot x}$$

$\ell^\mu \ell_\mu = 0$, $\ell^0 = 1$, $k^\mu = \omega\cdot\ell^\mu$

ETC = equal time commutators (wenn bei $t=0$ Terme).

$$\Rightarrow \quad \mathcal{G}(E) = \mathcal{G}_A(E) + \mathcal{G}_+(E) = \mathcal{G}_R(E) + \mathcal{G}_-(E)$$

$G(E) = \int d^4x\ \langle 0|T[J^+_\mu(0) J_\nu(x)]|0\rangle\, e^{-iE\ell\cdot x}$.

Mikrokausalität fordert: F^A, F^R müssen für $x^2<0$ verschwinden $\Rightarrow$ Der Ort x^μ liegt für F^A in Rückwärts Lichtkegel, bei F^R in Vorwärts Lichtkegel.

Für F^A gilt: $x\cdot\ell < 0$, für F^R gilt $x\cdot\ell > 0$.

$\Rightarrow$ F^A ist analytisch für $\mathrm{Im}\, E \gtrless 0$, F^R analytisch für $\mathrm{Im}\, E \lessgtr 0$.

ETC ist FT eines Diff.operators wirkend auf $\delta^4(x-y)$, also ein Polynom und analytisch überall im Endlichen.

Definiere: $$\mathcal{G}(E) = \begin{cases} \mathcal{G}^A(E), & \mathrm{Im}\, E \gtrless 0 \\ \mathcal{G}^R(E), & \mathrm{Im}\, E \lessgtr 0. \end{cases}$$

ist analytisch überall bis auf Schnitte auf der reellen Achse.

Diskontinuität von $\varphi(E)$

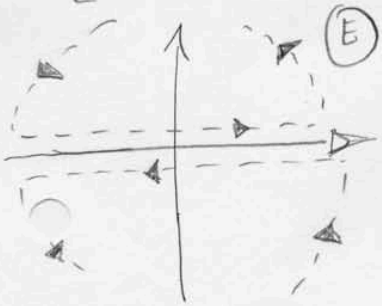
$$\varphi(E+i\varepsilon) - \varphi(E-i\varepsilon) = G^A(E) - G^R(E)$$
$$= G_-(E) - G_+(E)$$

Greensfunktionen haben die Eigenschaft, asymptotisch wie $1/|E|$ zu verschwinden in der oberen und unteren Halbebene.

Residuensatz:

$$\varphi(E) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\varphi(z)\,dz}{z-E}, \quad \text{wo}$$

E ein bel. Pkt. abseits der reellen Achse mit dem Weg C



$\varphi(E)$ verschwindet für $|E| \to \infty$, vorausgesetzt die Halbkreise.

$$\boxed{\varphi(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_-(\omega) - G_+(\omega)}{\omega - E}\,d\omega}$$

(Bem.: Unsubtrahierte Dispersionsrelation ohne Polynom $P(E)$, s. Weinberg I).

Nähert man sich der reellen Achse von oben.

$E \to E+i\varepsilon$;

$$G^A(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_-(\omega) - G_+(\omega)}{(\omega - E - i\varepsilon)}\,d\omega.$$

$$\frac{1}{\omega - E \mp i\varepsilon} = \underset{\text{Hauptwert}}{P\left(\frac{1}{\omega - E}\right)} + i\pi\,\delta(\omega - E)$$

$$G(E) = G^A(E) + G_+(E)$$

$$= G_+(E) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_-(\omega) - G_+(\omega)}{(\omega - E)}\,d\omega + \frac{1}{2} G_-(E) - \frac{1}{2} G_+(E)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{G(E) = \frac{1}{2} G_-(E) + \frac{1}{2} G_+(E) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_-(\omega) - G_+(\omega)}{(\omega - E)}\,d\omega.}$$

Limes kleiner Abstände $\nu/Q^2 \to 0$, (in dem nur die OPE funktioniert)
Entwicklg. in Potenzreihe in $1/x = 2\nu/Q^2$

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{1,n}(Q^2) \cdot x^{-n} \qquad \nu T_{2,3}/m_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2,3}(Q^2) \cdot x^{-n}$$

Dann gilt:

$$T_{i,n}(Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\nu'}{\nu'} \left(\frac{Q^2}{2\nu'}\right)^n T_i(Q^2, \nu') \left(\frac{\nu'}{m_p^2}\right)^{a_i}$$

$$a_i = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ 1 & i = 2,3. \end{cases}$$

Deformation des Weges; es fällt nur die Diskontinuität über den Schnitt bei.

$$T_{i,n}(Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Q^2/2}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'} \left(\frac{Q^2}{2\nu'}\right)^n W_i(Q^2, \nu') \left(\frac{\nu'}{m_p^2}\right)^{a_i}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-Q^2/2} \frac{d\nu'}{\nu'} \left(\frac{Q^2}{2\nu'}\right)^n \bar{W}_i(Q^2, -\nu') \left(\frac{\nu'}{m_p^2}\right)^{a_i}.$$

Bezugssystem mit unendlichen Impulsen:

$$q = \lambda \cdot n - q_0 \,, \qquad q: \text{Vektor des Impulsübertrags.}$$
n: lichtartiger Vektor, $n^2 = 0$.

$$\lambda \gg 1.$$

$$-q^2 = \underbrace{-\lambda^2 \cdot n^2}_{=0} + 2\lambda(nq_0) \underbrace{- q_0^2}$$

dieser Term, der die Raumartigkeit des Vektors q ausmacht, kann für q_0, $\lambda \to \infty$ vernachlässigt werden.

$$\Rightarrow \boxed{-q^2 \sim 2\lambda(n \cdot q_0) \xrightarrow{\lambda \to \infty} \infty}$$

$$\nu = (P \cdot q) = \lambda(P \cdot n) - \underbrace{(P \cdot q_0)}_{\simeq 0 \text{ für } \lambda \to \infty} \xrightarrow{\lambda \to \infty} \infty$$

$$x = \frac{Q^2}{2\nu} \approx \frac{2\lambda(nq_0)}{\lambda(P \cdot n)} \longrightarrow \frac{2(nq_0)}{(P \cdot n)} = \text{const.} \quad !$$

$q^2 \to \infty$ für alle Richtungen $\to \infty$ wird die bedeutet q^2 skaliert mit λ^2, ν mit λ, $\Rightarrow$ x skaliert mit λ, ging linear mit zunehmendem Impuls gegen ∞, experimentell nicht beobachtbar, ($q^2 \xrightarrow{\text{un.}} \infty$, $x \to 0$) nicht der Grenzübergang der DIS, sondern ($q^2 \xrightarrow{\text{un.}} \infty$, $x^2 \to 0$) (Lichtkegelentwicklung).

Ziel: Störungstheoretische Berechnung des Operatorproduktes, v.a. der Korrekturen zu diesem (anomale Dimensionen). Produkt der Ströme dazu nicht geeignet, Übergang zu zeitgeordnetem Produkt erforderlich.

Singularitäten treten auf für $x \to 0$.
(Für den Kommutator müssen die Differenzen der Argumente zeitartig ($x^2 \geq 0$) sein, da er für raumartige Abstände verschwindet)

Komplementarität der Fourier-Größen: $x \to 0 \iff q \to \infty$

$\Rightarrow \quad x = \frac{Q^2}{2(P \cdot q)} \to \infty$, ist aber physikalisch gebunden durch $x \leq 1$. ↯

$$\boxed{\text{OPE}}$$

$$\langle P | T[\hat{J}_\mu(x) \hat{J}_\nu(0)] | P \rangle$$

$$= \sum_s C^s_{\{\mu'\}}(x) \langle P | \hat{O}^{\{\mu'\}}_s(0)_{\mu\nu} | P \rangle$$

Was ist die OPE?

Zimmermann-Formulierung:

Ein Zeitgeordnetes Produkt von Operatoren, deren Argumente einander annähern, kann durch eine Summe von lokalen Operatoren einer vollständigen Basis ausgedrückt werden, wobei die Koeffizienten der Entwicklung alleine die Singularitäten des Operatorproduktes tragen.

Beispiel einer Singularität:

$(*)\ \langle 0|\Phi(x)|k\rangle \neq 0$, $P_\mu|k\rangle = k_\mu|k\rangle$, $k^2 = m^2$

$\langle 0|\Phi(x)|k\rangle = \langle 0|\Phi(0)|k\rangle \cdot e^{-ikx}$

$$\Rightarrow \langle 0|\Phi(x)\Phi(x)|0\rangle \geq \sum_i \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \langle 0|\Phi(x)|k_i\rangle\langle k_i|\Phi(x)|0\rangle$$

kann nur einen Zustand mit nicht verschwindendem Matrixelement $(*)$

$$\geq \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} |\langle 0|\Phi(x)|k\rangle|^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} |c|^2 \longrightarrow \infty \ .$$

OPE:

$$T[\phi_1(x)\phi_2(0)] \xrightarrow[x\to 0]{} \underbrace{C_1}_{\text{der Vakuumerwartungswert (d.h. } \mathcal{O}\equiv\mathbb{1}\text{) ist der am meisten singuläre Term, s. R. de Mottoni / H. Genz (1970).}} + \sum_{\mathcal{O}} C^{12}_{\mathcal{O}}(x)\,\mathcal{O}(0)$$

Der Einheitsoperator tritt in unserem Problem nicht auf, da eine Streuung stattfinden soll.

„Beweis" der OPE mittels Pfadintegralen

$$\langle 0|T\left[\hat{A}_1(x_1)\hat{A}_2(x_2)\ldots\hat{B}_1(y_1)\hat{B}_2(y_2)\ldots\right]|0\rangle$$

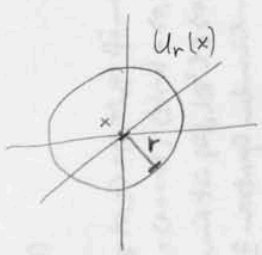
$$= \int \prod_i \left[d\phi_i(z)\right] A_1(x_1)\,A_2(x_2)\ldots B_1(y_1)\,B_2(y_2)\ldots\, e^{iS[\phi]}$$

ϕ sind die fundamentalen Felder der Theorie, $\hat{\phi}$ die zugehörigen Feldoperatoren.
A, B sind Funktionen der klassischen Felder, $\hat{A}, \hat{B}$ sind die gleichen Funktionen, mit den klassischen Feldern durch die zugehörigen Feldoperatoren ersetzt!

Die Argumente der Operatoren $\hat{A}_1(x_1), \hat{A}_2(x_2), \ldots$ sollen alle gegen einen gemeinsamen Punkt x streben; $\hat{B}_1(y_1), \hat{B}_2(y_2), \ldots$ haben feste Argumente.

Wähle Kugel $U_r(x)$ mit Radius r, so, daß

$$|x_i - x_j| \ll r, \quad |x_i - y_j| \gg r, \quad |y_i - y_j| \gg r$$



Wirkung lokal $\Rightarrow$ $S = \int_{z\in U_r(x)} d^4z\,\mathcal{L}(z) + \int_{z\notin U_r(x)} d^4z\,\mathcal{L}(z)$

Spalte das Pfadintegral auf:

$$e^{iS[\phi]} = e^{i\int_{z\in U_r(x)} d^4z\,\mathcal{L}(z)} \cdot e^{i\int_{z\notin U_r(x)} d^4z\,\mathcal{L}(z)}$$

$$\Rightarrow \langle 0|T\left[\hat{A}_1(x_1)\,\hat{A}_2(x_2)\ldots\hat{B}_1(y_1)\,\hat{B}_2(y_2)\ldots\right]|0\rangle$$

$$= \int \prod_i \left[d\phi_i(z)\right] A_1(x_1)\,A_2(x_2)\ldots B_1(y_1)\,B_2(y_2)\ldots\, e^{iS[\phi]}$$

$$= \int \prod_i \left[d\phi_i(z)\right]\Big|_{z\in U_r(x)} \int \prod_i \left[d\phi_i(z)\right]\Big|_{z\notin U_r(x)} B_1(y_1)\,B_2(y_2)\ldots\, A_1(x_1)A_2(x_2)\cdot$$

$$\cdot\ldots\cdot e^{i\int_{z\in U_r(x)} d^4z\,\mathcal{L}(z)}\, e^{i\int_{z\notin U_r(x)} d^4z\,\mathcal{L}(z)}$$

$$= \int \prod_i \left[d\phi_i(z)\right]\Big|_{z\notin U_r(x)} B_1(y_1)\,B_2(y_2)\ldots\, e^{i\int_{z\notin U_r(x)} d^4z\,\mathcal{L}(z)} \cdot$$

$$\cdot \int \prod_i \left[d\phi_i(z)\right]\Big|_{z\in U_r(x)} A_1(x_1)\,A_2(x_2)\ldots\, e^{i\int_{z\in U_r(x)} d^4z\,\mathcal{L}(z)}$$

Einschränkung an die Felder innerhalb der Kugel, daß diese glatt (C^∞) auf der Oberfläche der Kugel an die Felder außerhalb der Kugel anschließen

$$\langle 0|T[\dots]|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi_1\, I_1 \cdot \int \mathcal{D}\phi_2\, I_2 =: P_1 \cdot P_2$$

P_2 hängt nicht von den Feldern außerhalb der Kugel ab (bis auf die glatte Fortsetzbarkeit), so daß nach Ausführung der Integration in P_2 dieses nur noch von Werten der Felder und deren Ableitungen auf der Oberfläche der Kugel abhängen kann.

Wegen der Glattheit der Felder kann man aber die Felder (und deren Ableitungen) auf dem Rand nach den Feldern und Ableitungen der Felder außerhalb der Kugel entwickeln.

$$P_2 \equiv P_2\left[\phi(|x|=r),\ \partial_\mu\phi(|x|=r),\ \dots\right](x_1, x_2, \dots)$$

(hängt von den Werten $x_1, x_2, \dots$ ab, wie dies die einzigen ausgezeichneten Punkte waren).

Drücke nun die Werte der Felder und Ableitungen auf dem Rand durch die Felder und Ableitungen aus, die ursprünglich außerhalb der Kugel definiert worden waren, nun aber aufgrund der Glattheitseigenschaften mittels Taylorentwicklung (besser: Laurent-reihenentwicklung) nach dem Punkt x extrapoliert werden.

$$P_2\left[\phi(|x|=r),\ \partial_r\phi(|x|=r),\ \dots\right](x_1, x_2, \dots)$$
$$= \tilde{P}_2\left[\phi(x),\ \partial_r\phi(x),\ \dots\right](x-x_1, x-x_2, \dots)$$
$$= \sum_0 C_0^{A_1 A_2 \dots}(x_1-x, x_2-x, \dots)\,\mathcal{O}(x).$$

$$\Rightarrow \langle 0|T\left[\hat{A}_1(x_1)\,\hat{A}_2(x_2)\dots \hat{B}_1(y_1)\,\hat{B}_2(y_2)\dots\right]|0\rangle \cdot$$

$$\to \int \prod_i [d\phi_i(z)] \cdot B_1(y_1)\,B_2(y_2)\dots\, e^{i\int_{z\in\mathbb{R}^4} d^4z\,\mathcal{L}(z)} \cdot$$
$$\cdot \sum_0 C_0^{A_1 A_2 \dots}(x_1-x, x_2-x, \dots)\,\mathcal{O}(x)$$
$$= \sum_0 C_0^{A_1 A_2 \dots}(x_1-x, x_2-x, \dots)\,\langle 0|T\left[\hat{\mathcal{O}}(x)\,\hat{B}_1(y_1)\,\hat{B}_2(y_2)\dots\right]|0\rangle$$

Im Grenzwert $r \to 0$

Strategie: OPE für das Matrixelement des zeitgeordneten Produktes der Ströme im Protonzustand.

- Klassifizierung der Operatoren, die zur OPE beitragen nach deren Lorentzstruktur; gebraucht wird der EW im Zustand $\langle P|$, also kann wegen der Lorentz-Invarianz die Tensor-Struktur von $\langle P|\hat{O}^{\{\mu_1\dots\mu_n\}}|P\rangle$ nur aus p^μ und $g^{\mu\nu}$ aufgebaut sein.

- Wir benötigen $T_{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{iqx} \langle P|T[j_\mu(x) j_\nu(0)]|P\rangle$, also die FT, so daß nur der Vektor q^μ (und wieder $g^{\mu\nu}$) Lorentz-Indizes liefern können.

- Wir sind am meisten singulären Term interessiert! (oder Termen!)

- Um $T_{1,2}$ zu extrahieren, müssen wir einmal $g^{\mu\nu}$, zum anderen $p^\mu p^\nu$ aus der Indexstruktur des Matrixelementes $\langle P|\hat{O}^{\{\mu_1\dots\mu_n\}}|P\rangle$ herausziehen!

- $g_{\mu\nu}$ ist unterdrückt, wegen der Kontraktion mit $q_\mu q_\nu$ als Koeffizienten der OPE.

$$p_\mu p_\nu q^\mu q^\nu = (p\cdot q)^2$$

$$g_{\mu\nu} p^2 q^\mu q^\nu = -p^2 Q^2$$

$$|-m_p^2 Q^2| \ll (p\cdot q)^2 = \frac{4(p\cdot q)^2}{Q^4}\,\frac{Q^4}{4} = \frac{Q^4}{4}x^2$$

$$\Rightarrow \langle P|\hat{O}_s^{\{\mu_1\dots\mu_n\}}|P\rangle = \underbrace{\left(p^{\{\mu_1}\cdots p^{\mu_n\}} - \text{Spuren}\right)}_{\text{Symmetrisierung ergibt höchste Lorentz-Darstellung (Spuren), Abziehen der Spuren sorgt für Irreduzibilität.}} \cdot \underbrace{\langle \hat{O}_{si}\rangle}_{\text{konstante Koeffizient}}$$

12a

Dimensionalanalyse

Operator mit s Lorentz-Indizes in der OPE trägt s Faktoren $(P\cdot q) \equiv \nu$ zu $T_1(\nu, Q^2)$, aber nur $(s-2)$ Faktoren ν zu $T_2(\nu, Q^2)$ bei, weil zwei P_μ's herausgezogen werden müssen. (Die P_μ's aus $\langle P| \mathcal{O}^{\{\mu\}} |P\rangle$ sind ja mit q^μ's von den Entwicklungskoeffizienten $C_{\{\mu\}}$ der OPE kontrahiert!).

$$T\left[\hat{\phi}_1(x)\,\hat{\phi}_2(0)\right] = \sum_{\mathcal{O}} C_{\mathcal{O}}^{\phi_1\phi_2}(x)\cdot\hat{\mathcal{O}}(0)$$

links: $\dim = d_{\phi_1} + d_{\phi_2}$ — Gleichheit der Dimensionen verlangt
rechts: $\dim = d_C + d_{\mathcal{O}}$ $\quad d_C = d_{\phi_1} + d_{\phi_2} - d_{\mathcal{O}}$,
logarithmische Korrekturen durch die Renormierungsgruppe vernachlässigt.

Die Koeffizienten von T_1 und T_2 haben die q^2-Abhängigkeit

$$T_1: \quad (q^2)^{\frac{-4+6-d(s,i)-s}{2}} \qquad T_2: \quad (q^2)^{\frac{-4+6-d(s,i)-s+2}{2}}$$

Der Summand (-4) stammt von der Integration der FT in $T_{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{iqx} \langle P|T[J_\mu(x), J_\nu(0)]|P\rangle$, + 6 sind die em. Ströme; (z.B. aus Bewegungsgl. $\partial_\mu F^{\mu\nu} = e J^\nu$); die Terme $-\frac{s}{2}$ und $-(s-2)/2$ tragen den bereits herausgezogenen (in ν steckenden) Faktoren Rechnung; man erhält:

$$T_{1,si} \propto \nu^s (q^2)^{\frac{2-d(s,i)-s}{2}} \propto \left(\frac{1}{x}\right)^s (q^2)^{\frac{2-\tau(s,i)}{2}}$$

$$\nu T_{2,si} \propto \nu^{s-1} (q^2)^{\frac{4-d(s,i)-s}{2}} \propto \left(\frac{1}{x}\right)^s (q^2)^{\frac{2-\tau(s,i)}{2}}$$

$$\tau(s,i) \equiv d(s,i) - s \text{ ist der } \underline{\text{TWIST}} \text{ eines Operators.}$$

$d(s,i)$ ist die Dimension des Operators $\mathcal{O}_{si}^{\{\mu\}}$

Warum $\nu \cdot T_2$? Zunächst mal wegen der Dimensionalität, der Vorfaktor von T_2 trägt Dimension 2, der von T_1 ist dimensionslos. Außerdem skalieren die beiden Größen gleich, was nur natürlich ist.

Die dominanten Operatoren in der Entwicklung von T_1 und νT_2 für $q^2 \to \infty$ sind diejenigen mit minimalem Twist.

$$T_{1,2}(\nu, q^2) = \frac{1}{2} W_{1,2}(\nu, q^2) + \frac{1}{2} W_{1,2}(-\nu, q^2) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{Kontur}} d\nu' \, W_{1,2}(\nu', q^2) \left(\frac{1}{\nu' + \nu} + \frac{1}{\nu' - \nu} \right)$$

Die Dispersionsrelation zeigt, daß keine Terme mit ungeradem Potenz von ν auftreten können, also können nur Operatoren $\hat{O}_s$ mit geradem s beitragen.

Symmetrische spurfreie Tensoren minimaler Dimensionalität:

$$(\hat{O}_{sf})_{\mu_1 \cdots \mu_s} = \frac{i^{s-2}}{s!} \bar{\Psi}_f \left(\gamma_{\{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \cdots \overleftrightarrow{D}_{\mu_s\}} - \text{Spuren} \right) \Psi_f$$

$$(\hat{O}_{sg})_{\mu_1 \cdots \mu_s} = \frac{i^{s-2}}{2s!} \left(F^{\nu}_{a\,\{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_3} \cdots \overleftrightarrow{D}_{\mu_s} F^{a\nu}{}_{\mu_2\}} - \text{Spuren} \right)$$

Beides sind Flavour-Singletts, $SU(3)_C$-eichinvariant.

$i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi = \frac{1}{2} [\psi(\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \psi)\phi]$; die Summe verschwindet in jedem Matrixelement zwischen gleichen Zuständen ($|P\rangle$) $\Rightarrow$ nimm die Differenz.

Twist = Gross / Treiman

$$\dim(\hat{O}_{sf}) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} + (s-1) = 2 + s \Rightarrow \boxed{\tau(sf) = 2}$$

$$\dim(\hat{O}_{sg}) = 2 + 2 + (s-2) = 2 + s \Rightarrow \boxed{\tau(sf) = 2}$$

$\hookrightarrow$ Spuren können weggelassen werden, da $g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$ unterdrückt ist gegenüber $P_\mu P_\nu$ (s.o.).

Für Twist 2 hängen die Koeffizienten und damit die Strukturfunktionen nicht von Q^2 ab $\Rightarrow$ Bjorken-Scaling

Operatoren mit mehr als 1 Gamma-Matrix tragen wegen $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$ nur um $\frac{m_p^2}{Q^2}$ verringert bei; ein γ_μ hat geringeren Twist als $\overleftrightarrow{D}_\mu$.

Faustregel: $\tau(\bar{\psi}_f) = \tau(\psi_f) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

$\tau(\partial_\mu) = \tau(D_\mu) = 1 - 1 = 0, \quad \tau(\gamma_\mu) = 0 - 1 = -1.$

Im Gluon-Fall gilt; 2 Indizes eines Feldstärke-Tensors können nicht mit-symmetrisiert werden, je eins von jedem ist das Maximum. Eichindizes müssen wegen Eichinvarianz kontrahiert werden; weitere Feldstärketensoren können wegen $F_{\mu\nu} \propto [D_\mu, D_\nu]$ ersetzt werden durch kovariante Ableitungen.

Operator 1 einziger Operator mit Twist ~~0 (1)~~

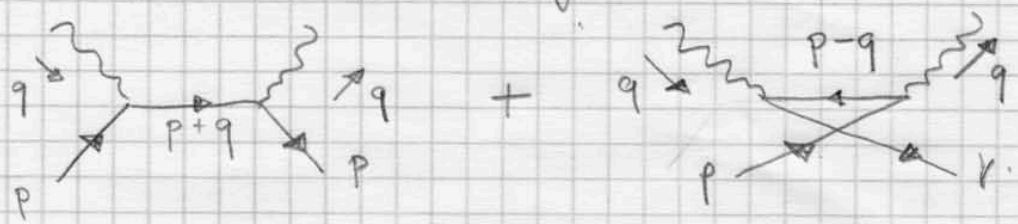
$0 - 0 = 0$. kommt aber nicht in der DIS vor, wohl aber in der Hadronproduktion aus e^+e^- – Kollisionen.

„higher twist"- ~~Korrekturen~~ Terme sind gegenüber nächsten „leading twist"- Korrekturen um m_p^2/Q^2 unterdrückt.

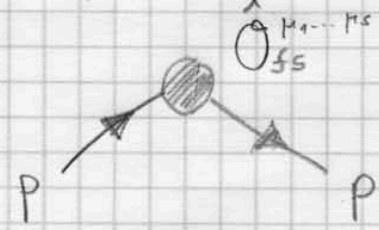
Rechnung in „leading twist" erst bei großem Q^2 hinreichend zuverlässig!

diagrammatische Darstellung

Beitragende Feynman-Diagramme:



ersetzt man das zeitgeordnete Produkt durch die OPE, erhält man Operatoreinsetzungen der Art



$$= i\, g^{\{r_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n\}}$$

Berechnung der Koeffizienten der OPE:

Umkehrung des Gedankens - Vergleiche Quarks als äußere Zustände, rechne das Produkt der Quark-Ströme aus, entsprechend den beiden oberen Diagrammen (selbes Flavour).

$$\int d^4x\, e^{iqx}\, T[j_\mu(x)\, j_\nu(0)]$$

$$\sim i \int d^4x\, e^{iqx} \Big\{ \overline{\Psi}(x)\, \gamma^\mu \overbrace{\Psi(x)\, \overline{\Psi}(0)}\, \gamma^\nu \Psi(0) + \overbrace{\overline{\Psi}(x)\, \gamma^\mu \Psi(x)\, \overline{\Psi}(0)}\, \gamma^\nu \Psi(0) \Big\}$$

0. Ordnung in α_s

zwei Kontraktionen = tragen nur zur Vakuumpolarisation bei, unverbunden; Kontraktion (Feynman-Propagator) singulär für $x \to 0$, Term mit keiner Kontraktion nicht, daher vernachlässigbar.

Die äußeren Impulse der Quarks kann man durch Ableitungen ersetzen $p_\mu \longleftrightarrow i\partial_\mu$

Damit erhält man (Summe über die Flavour).

$$-\sum_f Q_f^2 \left\{ \bar{\Psi}_f(0)\gamma_\nu \frac{i\not{\partial}+\not{q}}{(i\partial+q)^2+i\varepsilon}\gamma_\nu \Psi_f(0) + \bar{\Psi}_f(0)\gamma_\nu \frac{i\not{\partial}-\not{q}}{(i\partial-q)^2+i\varepsilon}\gamma_\mu \Psi_f(0)\right\}$$

(ein zweites Diagramm durch Übergang von $x \to -x$ in der Integration nach Summation der Translationsinvarianz Übergang $q \to -q$)

Entwicklung:

$$\frac{1}{(i\partial \pm q)^2} = \frac{1}{-\partial^2 \pm 2iq\partial + Q^2} = \frac{-1}{Q^2 \mp 2iq\cdot\partial + \partial^2} = -\frac{1}{Q^2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\pm 2iq\partial - \partial^2}{Q^2}\right)}$$

$q^2 = -Q^2$

$$= -\frac{1}{Q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pm 2iq\cdot\partial - \partial^2}{Q^2}\right)^n$$

Verarte die γ^3-Produkte in den Ausdrücken; wie gezeigt, ist $H_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ symmetrisch in $\mu \leftrightarrow \nu$; Symmetrisiert die Gamma-Matrix-Ausdrücke:

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu\right) = \frac{1}{2}\Big(2g_{\mu\alpha}\gamma_\nu - \gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu + 2g_{\nu\alpha}\gamma_\mu - \gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\mu\Big) = g_{\mu\alpha}\gamma_\nu + g_{\nu\alpha}\gamma_\mu - g_{\mu\nu}\gamma_\alpha$$

$$\gamma_\mu\left(\pm\not{q} + i\not{\partial}\right)\gamma_\nu = \pm q_\mu\gamma_\nu \mp g_{\mu\nu}\not{q} \pm q_\nu\gamma_\mu + i\partial_\mu\gamma_\nu - g_{\mu\nu}i\not{\partial} + i\partial_\nu\gamma_\mu$$

In führender Ordnung α_s erfüllen die Quarkfelder die Dirac-Gleichung, $i\not{\partial}\Psi_f = 0 \Rightarrow i\not{\partial}$ fällt weg.

Terme proportional q_μ oder q_ν ordnen sich in das Schema der Strukturfunktionen T_1 und T_2 ein, tragen aber wegen Stromerhaltung ohnehin nicht bei (bei Kontraktion mit dem Leptonentensor).

In der Entwicklung der geometrischen Reihe können die Operatoren ∂^2 gegenüber $\pm 2iq\partial$ vernachlässigt werden, da sie bei Anwendung auf die Protonenzustände im tiefinelastischen Grenzfall (ja dieser Grenzfall, diese Anwendung interessiert uns, wir rechnen sie nur mit einem anderen Prozeß aus!)

P^2 zählt gegenüber $2(Pq)$ $\qquad 2(Pq) \gg P^2$ (s.o.)

$$\Rightarrow \int d^4x\, e^{iqx}\, T\left[J_\mu(x)\, J_\nu(0)\right]$$

ungerade Potenzen heben sich weg. in 1. Term gerade in 2. Term.

$$\sum_f Q_f^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{Q^2} \overline{\psi}_f(0) \Bigg[\Big(-g_{\mu\nu}\not{\partial} + \underbrace{i\partial_\mu\gamma_\nu + i\partial_\nu\gamma_\mu}_{\equiv 2i\,\partial_{\{\mu}\gamma_{\nu\}}}\Big) \left(\frac{2iq\cdot\partial}{Q^2}\right)^s + \Big(g_{\mu\nu}\not{\partial} + \underbrace{i\partial_\mu\gamma_\nu + i\partial_\nu\gamma_\mu}_{\equiv 2i\,\partial_{\{\mu}\gamma_{\nu\}}}\Big) \left(\frac{-2iq\cdot\partial}{Q^2}\right)^s \Bigg] \psi(0)$$

$$= \sum_f Q_f^2 \sum_{s=1}^{\infty} \overline{\psi}_f(0) \left[\frac{4}{Q^2} \left(\frac{2iq\cdot\partial}{Q^2}\right)^{2s} i\,\partial_{\{\mu}\gamma_{\nu\}} - g_{\mu\nu} \frac{2q^\rho}{Q^2} \frac{2q^\sigma}{Q^2} \left(\frac{2iq\cdot\partial}{Q^2}\right)^{2s-2} i\,\partial_{[\rho}\gamma_{\sigma]} \right] \psi_f(0)$$

(*)

Einsetzen der Entwicklung in der tiefinelastischen Streuung mit Protonzuständen $\qquad 2iq\cdot\partial \to 2(Pq)\,, \quad i\partial_\mu \to P_\mu$

$$= \sum_f Q_f^2 \Bigg[4 \sum_{\substack{s=2 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \frac{(2q_{\mu_0}) \cdots (2q_{\mu_{s-2}})}{(Q^2)^{s-1}} \hat{O}_f^{\mu\mu_1\cdots\mu_{s-2}} - g^{\mu\nu} \sum_{\substack{s=2 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \frac{(2q_{\mu_0}) \cdots (2q_{\mu_s})}{(Q^2)^s} \hat{O}_f^{\mu_1\cdots\mu_s} \Bigg]$$

(*) Diese Schreibweise stammt aus meinem Kenntnis der möglichen Operatoren, die zur OPE beitragen, sowie der Lorentzstruktur der Strukturfunktionen. Als Matrixelemente kommen nur symmetrisierte P_μ-Produkte in Frage, im ersten Term müssen dann zwei Indizes durch $P_\mu P_\nu$ gebildet, der Rest sind Ableitungen.

Einsetzen der Entwicklung in der DIS mit Protonzuständen; (Symmetrisierung liefert Faktor 2).

$$T^{\mu\nu}(P,q) = \sum_s Q_s^2 \left[\sum_{\substack{n=2 \\ \text{gerade}}}^{\infty} 8 p^\mu p^\nu \left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} \frac{\langle \hat{O}_{sf} \rangle}{Q^2} - \sum_{\substack{n=2 \\ \text{gerade}}}^{\infty} 2 g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{x}\right)^n \langle O_{sf} \rangle \right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_1(Q^2, \tfrac{1}{x}) = \frac{Q^2}{4x^2} T_2(Q^2, \tfrac{1}{x})}$$

Callan-Gross-Relation

ohne Parton-Modell.

Rückberechnung der Koeffizienten von $H_{\mu\nu}$, W_{112} über Residuensatz (Momente).

Quintessenz:

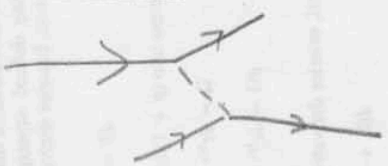
Die OPE ist eine Operatoridentität; die bei der DIS auftretenden Koeffizienten sind die gleichen wie bei einem hochenergetischen QCD-Prozeß, der störungstheoretisch berechnet werden kann. Die Renormierungsgruppe kann dann die nötigen Korrekturen aufsummieren von der großen Energieskala hinunter in die Niederenergiephase (gebundenes Proton gegenüber dem hochenergetischen Leptonstreuprozeß). Korrekturen durch RG sind logarithmischer Natur (⇒ Verletzung des Bjorken-Scalings).

Weitere Bemerkungen

- $\alpha_{em.}$ und α_{weak} $\Rightarrow$ vernachlässige höhere Ordnungen der elektroschwachen WW.

- hohe Energien: skalarer Higgs-Austausch. ändert Wirkungsquerschnitt. OPE wird anders aufgrund anderer Lorentz-Struktur der „Ströme". !

  (SUSY-Partner)



- elektroschwache Korrekturen nur durch weiche Photonen.

- $$\boxed{\omega \equiv \frac{1}{x}}$$

- „Standard" $\leftrightarrow$ „Nicht-Standard"-Normierung des Hadronen-Tensors $\frac{1}{4\pi}$ oder nicht

- allgemeinste Form des Hadronen-Tensors

$$
\begin{aligned}
W_{\mu\nu} = \; & W_1 \cdot \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \\
& + W_2 \cdot \left(P_\mu - \frac{q_\mu}{2x}\right)\left(P_\nu - \frac{q_\nu}{2x}\right) \\
& - i W_3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha q^\beta \cdot \left(\frac{1}{2m_p^2}\right) \\
& + W_4 \cdot \frac{q_\mu q_\nu}{m_p^2} \\
& + W_5 \cdot \left(\frac{P_\mu q_\nu + q_\mu P_\nu}{2m_p^2}\right) \\
& - i W_6 \cdot \left(\frac{P_\mu q_\nu - q_\mu P_\nu}{2m_p^2}\right)
\end{aligned}
$$

W_i, $i = 1, \dots, 6$ Strukturfunktionen.

$W_i \in \mathbb{R}$

Starke WW zeitumkehrinvariant $\Rightarrow \boxed{W_6 \equiv 0}$

rein em. Prozeß $q_\mu W^{\mu\nu} = 0$ $\Rightarrow \boxed{W_4 = W_5 = 0}$

Neutrino-Streuung W_3 wichtig

W_4, W_5 bei Quark-Massen $\neq 0$. unterdrückt um $m_e m_q / Q^2$

Unterschiede:

Strukturfunktion ⟷ Quarkverteilungsfunktion

Strukturfunktion → Koeffizienten von Tensoren in Strom-Korrelationsfunktionen

Quarkverteilungsfunktion → Verteilungsfunktionen der Quarks in Hadronen.

verknüpft in der DIS.

Standard-Definition der Strukturfunktionen:

$$F_1(x, Q^2) = W_1(Q^2, \nu = Q^2/2x)$$

$$F_{2,3}(x, Q^2) = \nu W_{213}/m_p^4$$

$$F_{4,5}(x, Q^2) = \nu^2 W_{415}/m_p^6$$

skaliert mit

$$W_1 \sim (Q^2)^0$$

$$W_{213} \sim 1/Q^2$$

$$W_{415} \sim 1/Q^4$$

Naive obige Definitionen.

(AII).

phänomenologisches Verständnis

Die Verteilungsfunktion wachsen bei festem x mit Q^2 bei kleinem x und fallen ab bei großem x.

Erklärung d. QCD-Korrekturen (Altarelli-Parisi-gl.)

Partonen bei hohem x reißen zur Abstrahlung und bewegen sich zu kleineren Werten von x. Neue Partonen werden bei kleinem x gebildet.
Das Proton hat somit mehr und mehr Konstituenten, wenn es bei immer kleineren Abstandsskalen abgetastet wird.

---

mehrere Effekte:

- Operator renormalisierung durch RG, logarithmische Korrekturen des Scaling

$$A_f^n(Q^2) = \left(\frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)}\right)^c A_f^n(\mu^2) \; ; \quad c \propto -\gamma^{(1)}$$

$\gamma^{(1)}$: 1. Koeffizient der Gamma-Funktion in Störungstheorie.

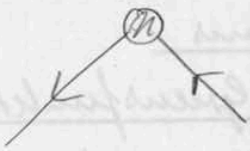
Standard-Referenz-Punkt $\mu \simeq 1\,\text{GeV}$

- Operator-Mischungen
Die führenden Twist 2-Operatoren (es gibt wegen der Gluonen mehrere in der QCD) können untereinander mischen, s. nächste Seite.
⇒ diagonalisiere die Matrix der Anom.-Koeffizienten.

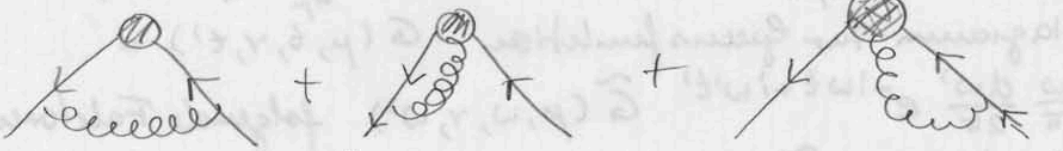
- berücksichtige Terme höheren Twists

In QCD $\gamma^{(1)} > 0$ ⇒ Q^2 groß → $A_f^n(Q^2)$ klein und ungefähr; erklärt qualitativ Verletzung des Bjorken-Scaling.

(A II)

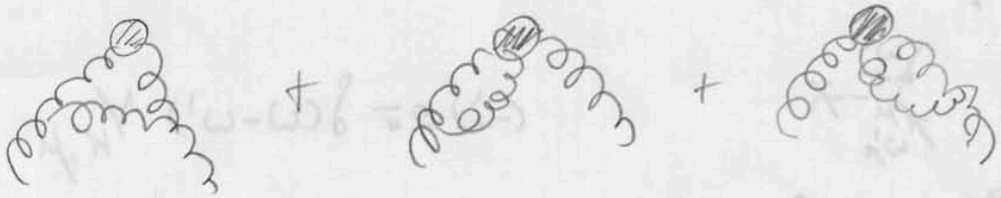


QCD - Korrektur - Quarks

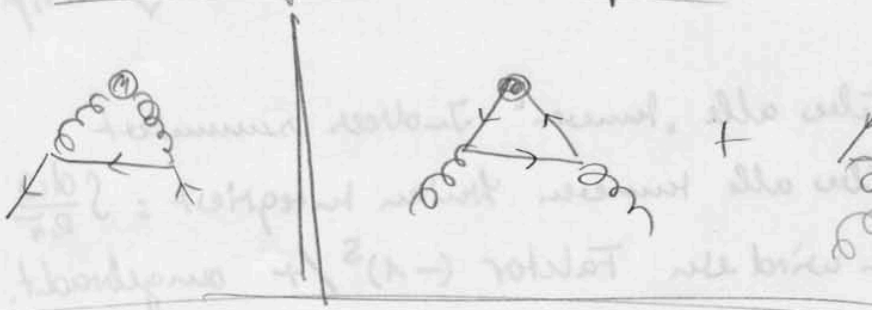


Summe von allen kovarianten Beiträgen

Gluonen:



Quark - Gluon - Mischung:



A IV.

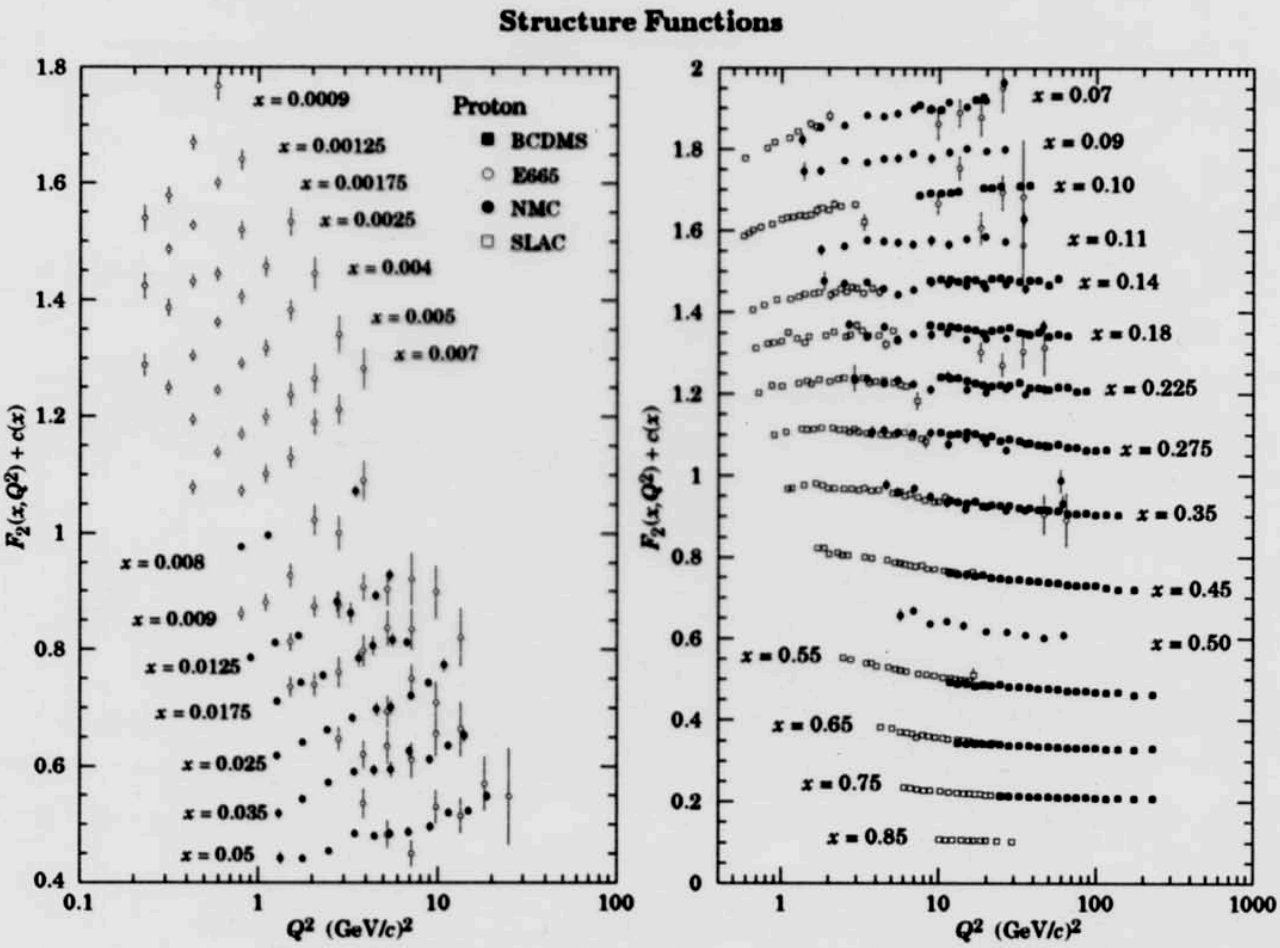


Figure 37.3: The proton structure function F_2^p measured in electromagnetic scattering of electrons (SLAC) and muons (BCDMS, E665, NMC), shown as a function of Q^2 for bins of fixed x. Only statistical errors are shown. For the purpose of plotting, a constant $c(x) = 0.1i_x$ is added to F_2^p where i_x is the number of the x bin, ranging from 1 ($x = 0.05$) to 14 ($x = 0.0009$) on the left-hand figure, and from 1 ($x = 0.85$) to 15 ($x = 0.07$) on the right-hand figure. For HERA data in the kinematic range of this figure, see Fig. 37.1. References: **BCDMS**—A.C. Benvenuti *et al.*, Phys. Lett. **B223**, 485 (1989); **E665**—M.R. Adams *et al.*, Phys. Rev. **D54**, 3006 (1996); **NMC**—M. Arneodo *et al.*, Phys. Lett. **B364**, 107 (1995). **SLAC**—L.W. Whitlow *et al.*, Phys. Lett. **B282**, 475 (1992). (Courtesy of R. Voss, 1996.)

37. PLOTS OF CROSS SECTIONS AND RELATED QUANTITIES

NOTE: THE FIGURES IN THIS SECTION ARE INTENDED TO SHOW THE REPRESENTATIVE DATA. THEY ARE NOT MEANT TO BE COMPLETE COMPILATIONS OF ALL THE WORLD'S RELIABLE DATA.

Structure Functions

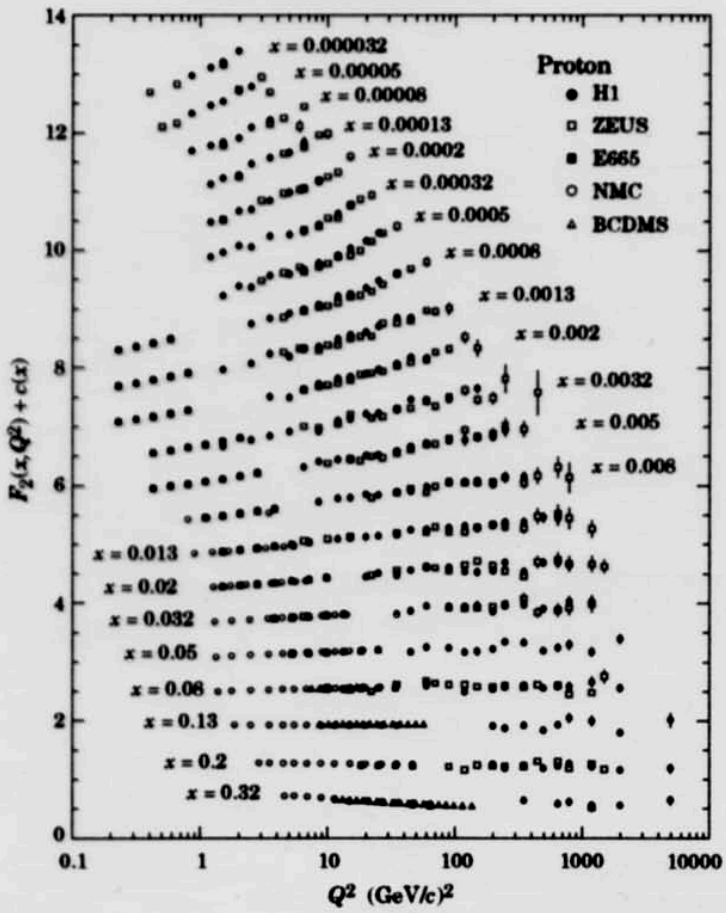


Figure 37.1: The proton structure function F_2^p measured in electromagnetic scattering of electrons (H1, ZEUS) and muons (BCDMS, E665, NMC), in the kinematic domain of the HERA data, for $x > 0.00003$; *cf.* Fig. 37.2 for data at smaller x. Only statistical errors are shown. The data are plotted as a function of Q^2 in bins of fixed x. The H1 binning in x is used in this plot; the ZEUS, BCDMS, E665 and NMC data are rebinned to the x values of the H1 data using a phenomenological parametrization. For the purpose of plotting, a constant $c(x) = 0.6(i_x - 0.4)$ is added to F_2^p, where i_x is the number of the x bin ranging from $i_x = 1$ ($x = 0.32$) to $i_x = 21$ ($x = 0.000032$). References: **H1**—S. Aid *et al.*, Nucl. Phys. **B470**, 3 (1996); C. Adloff *et al.*, Nucl. Phys. **B497**, 3 (1997); **ZEUS**—M. Derrick *et al.*, Z. Phys. **C72**, 399 (1996); J. Breitweg *et al.*, Phys. Lett. **B407**, 432 (1997); **BCDMS**—A.C. Benvenuti *et al.*, Phys. Lett. **B223**, 485 (1989); **E665**—M.R. Adams *et al.*, Phys. Rev. **D54**, 3006 (1996); **NMC**—M. Arneodo *et al.*, Phys. Lett. **B364**, 107 (1995). (Courtesy of R. Voss, 1997.)