Jürgen Reuter

Helizitätsamplituden leichter Fermionen bei hohen Energien

Diplomarbeit

Will man nun annehmen, daß das abstrakte Denken das Höchste ist, so folgt daraus, daß die Wissenschaft und die Denker stolz die Existenz verlassen und es uns anderen Menschen überlassen, das Schlimmste zu erdulden. Ja es folgt daraus zugleich etwas für den abstrakten Denker selbst, daß er nämlich, da er ja doch selbst auch ein Existierender ist, in irgendeiner Weise distrait sein muß.

Søren Kierkegaard, „*Abschließende unwissenschaftliche Nachschrift zu den Philosophischen Brocken*“

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Die Elementarteilchen werden in der theoretischen Physik durch Quantenfelder beschrieben, die einen definierten geometrischen Charakter besitzen müssen, d.h., sie müssen einer irreduziblen Darstellung der Lorentz-Gruppe angehören. Eichbosonen wie das Photon, das Gluon sowie das W- und Z-Boson werden dabei durch Vektorfelder, das (hypothetische) Graviton durch ein Tensorfeld dargestellt. Die fundamentalen Fermionen, also Elektronen, Myonen, Neutrinos und Quarks samt deren Antiteilchen leben in den halbzahligen Spinordarstellungen.

Für das Berechnen von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsbreiten benötigt man die Kenntnis der entsprechenden Übergangsmatrixelemente. Feynman hat zur Ermittlung der Betragsquadrate dieser Matrixelemente eine Methode entwickelt, deren Hauptbestandteil aus dem Berechnen von Spuren über Gamma-Matrizen besteht, den Clebsch-Gordan-Koeffizienten zwischen der Spinor- und der Vektordarstellung. Diese Methode hat allerdings den Nachteil, bei wachsender Komplexität der Prozesse schnell undurchführbar zu werden, da bei einem Prozeß mit n beteiligten Diagrammen n^2 Spuren zu berechnen sind. Will man Prozesse polarisierter Teilchen rechnen, hat man Projektionsoperatoren der Gestalt $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5 \not{s})$ in die Spinoramplituden zu schreiben, so daß die Spuren durch das auftretende γ^5 noch komplizierter werden. Selbst Computeralgebra-Programme können die Zahl der bei solchen Prozessen anfallenden Terme dann nicht mehr bewältigen.

Um nun vor allem polarisierte Amplituden und Wirkungsquerschnitte zu ermitteln, ist es jedoch günstiger, zu einem anderen Formalismus überzugehen, der in seinen Grundzügen von Hermann Weyl und B. L. van der Waerden in den 1920er Jahren initiiert wurde. Hierbei bestimmt man die Amplituden für jede Kombination der Helizitäten der an einem Prozeß beteiligten Teilchen einzeln und summiert dann die Betragsquadrate dieser Amplituden inkohärent auf. Die Anzahl der Ausdrücke, die zu berechnen sind, wächst dabei lediglich linear mit der Zahl der Diagramme. Nach Arbeiten von Berends/Giele Ende der 1980er Jahre [2] und von Dittmaier [1],[7] finden die Weyl-van der Waerden-Spinoren (WvdW-Spinoren) nunmehr standardmäßig Anwendung in der Hochenergiephysik.

Hierbei stehen sich die Formalismen der beiden oben genannten Arbeiten im wesentlichen gegenüber: Während die Methode von Berends/Giele [2] nur unter der Annahme masseloser Fermionen anwendbar ist, liefert die Verallgemeinerung von Dittmaier [1] die exakten Ergebnisse für massive Fermionen enthaltende Amplituden. Die Einfachheit der analytischen Berechnung (aber auch die Implementierung mittels symbolischer und numerischer Algorithmen) des masselosen (hier kurz mit BG für Berends/Giele) bezeichneten Formalismus scheint diesem bei Hochenergie-Experimenten den Vorzug im Vergleich zum Dittmaier'schen Formalismus zu geben. Allerdings sind die Meßgenauigkeiten heutiger Experimente (am HEP in Genf, SLAC in Stanford sowie an künftigen Beschleunigern wie LHC in Genf oder am TESLA in Hamburg) so hoch, daß sich die Differenzen theoretischer Rechnungen unter der Annahme masseloser Fermionen mittlerweile deutlich bemerkbar machen. Ein weiterer Grund, die Fermionenmassen nicht rüde Null zu setzen, sind Divergenzen, die in masselosen Amplituden auftreten können, wenn die (masselosen) Fermionen kollineare Bremsstrahlungsquanten emittieren, was sich besonders bei der Phasenraumintegration bemerkbar macht.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, die Vorteile dieser beiden Methoden miteinander in Einklang zu bringen, d.h. bei einer (wenn auch nicht umwerfend großen) analytischen Vereinfachung die Amplituden mit massiven Fermionen den numerischen Methoden des BG-Formalismus' zugänglich zu machen. Dies geschieht im Rahmen einer Entwicklung der Weyl-van der Waerden-Spinoren nach der (im Falle von Hochenergie-Experimenten) kleinen Größe m_f^2/E_f^2. Dabei werden einige Schwierigkeiten bezüglich des Aufwandes von Rechnungen massiver Spinor-Amplituden nicht zu umgehen sein, um weiterhin numerisch vor (unphysikalischen) Singularitäten bei der Abstrahlung oder Absorption äußerer Photonen sicher zu sein. Ein einfaches Schema der Organisation der analytischen Ausdrücke solcher Amplituden im Falle der Quantenelektrodynamik, das sich nur so vereinfacht darstellt, weil man die Massenentwicklung nach der zweiten Ordnung abbricht, wiegt diese Nachteile aber wieder auf. Als nur unwesentlich aufwendiger stellt sich die Erweiterung auf Amplituden im Rahmen des gesamten Standardmodells, also unter Einschluß der Quantenchromodynamik und schwacher Prozesse, heraus.

Kapitel 2

Struktur der Feynmandiagramme im Standardmodell

2.1 Entlang der Fermionenlinien durch Baumdiagramme

Um sich die allgemeine Struktur von Feynmandiagrammen anzuschauen, ist es sinnvoll, zunächst als Spezialfall die Quantenelektrodynamik (QED) zu betrachten, da hier noch keine paritätsverletzenden Kopplungen auftreten, mit verschiedenen Vorfaktoren für die links- und rechtshändigen Fermionen. Die hier verwendeten Spinor-Konventionen (bzgl. der Vorzeichenwahl der Kontraktionen und der Wahl der äußeren Fermionenzustände usw.) sind an die in [1] getroffenen angelehnt und im Anhang notiert, ebenso wie die Feynman-Regeln, in WvdW-Spinoren ausgedrückt. Um an dieser Stelle einen schnellen Einstieg in den Formalismus finden zu können, werden hier einige Ergebnisse vorweggenommen (Formeln (2.1) – (2.3)), deren ausführliche Herleitung in Kapitel 4 nachgetragen wird.

Ein Feynman-Diagramm zerlegt man am einfachsten, indem man es nach den einzelnen Fermionenlinien, die ja in Abwesenheit einer den Spin s^2 ändernden Wechselwirkung (alle Observablen sind bosonisch!) stets durchlaufend sein müssen, aufschlüsselt. Ein Baumdiagramm (*tree level*) besteht dann einfach aus einer bestimmten Zahl von Fermionenlinien, die durch Photonenpropagatoren miteinander verbunden sind, wobei sie selbst aber wieder eine Kette bilden müssen, damit keine Schleifen auftreten. Weitere Vertizes können dann lediglich mit äußeren Photonen kontrahiert sein. Skalare Kopplungen werden hier im weiteren nicht betrachtet. Hierbei sei angemerkt, daß auch die Berechnung von Schleifen mittels WvdW-Spinoren möglich ist, sich in inneren Linien allerdings keine Vereinfachungen der analytischen Ausdrücke im

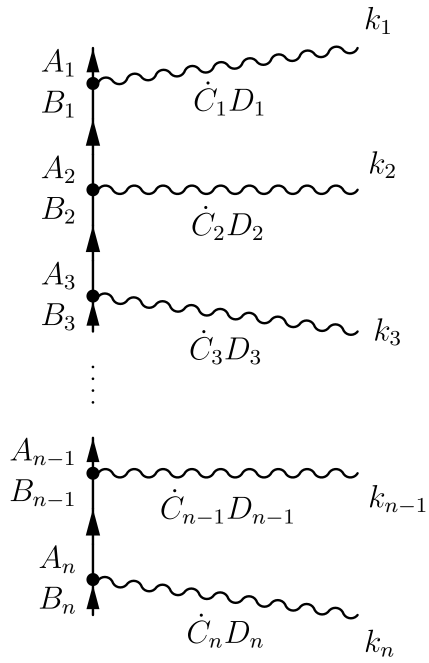


Abbildung 2.1: Allgemeine Fermionenlinie im Rahmen der QED

Vergleich zur traditionellen Technik mittels Spuren über Gamma-Matrizen ergeben.

Eine Fermionenlinie, unabhängig davon, ob sie eine durchlaufende Fermionen- bzw. Antifermionenlinie ist oder Paarerzeugung respektive Paarvernichtung darstellt, ist stets aus n Vertizes und $n-1$ zwischengeschalteten Propagatoren aufgebaut, die entweder mit Photonenpropagatoren oder äußeren Photonen kontrahiert sind. Fügt man also an einen Vertex $(n-1)$-fach die Kombination Propagator/Vertex an, so erhält man mit der in Abb. 2.1 in bezug auf die Indizes der WvdW-Spinoren verwendeten Nomenklatur die Amplitude (ohne äußere fermionische Helizitätszustände)

$$\begin{pmatrix} m_f \delta_{A_1}^{D_1} \epsilon^{B_n D_n} \mathcal{A}_{QED}(n) & \delta_{A_1}^{D_1} \delta_{\dot{B}_n}^{\dot{C}_n} \mathcal{B}_{QED}(n) \\ \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \epsilon^{B_n D_n} \mathcal{C}_{QED}(n) & m_f \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \delta_{\dot{B}_n}^{\dot{D}_n} \mathcal{D}_{QED}(n) \end{pmatrix} \mathcal{P}_{QED}(n). \tag{2.1}$$

$\mathcal{P}(n)$ ist hierbei ein Vorfaktor, der alle Nenner der Propagatoren der Gestalt $(P - m_f^2)^{-1}$, die i's aus den Zählern der Propagatoren sowie die Vertexfaktoren ($\mathrm{i}eQ_f$) aufsammelt. Die Terme $\mathcal{A}_{QED}(n)$ und $\mathcal{B}_{QED}(n)$ lassen sich in geschlossener Form, nach Potenzen der Fermionenmasse geordnet, aufschreiben

(s. Kapitel 4) und haben die in (2.2) bzw. (2.3) aufgeführte charakteristische Struktur; da wir im weiteren Verlauf an dem Bereich hoher Energien, d.h. (nahezu) vernachlässigbarer Fermionenmassen, interessiert sind, werden hier die höheren Terme in der Fermionenmasse nicht mehr explizit notiert.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{QED}(n) = & \quad \textstyle\prod_{i=1}^{n-1} P_i^{D_{i+1}\dot{C}_i} \\ & + m_f^2 \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n-1\,\prime} \left(\prod P_i^{D_{i+1}\dot{C}_i}\right) \epsilon^{\dot{C}_l\dot{C}_{l+1}} \epsilon^{D_k D_{k-1}} \\ & + m_f^4 \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n-1\,\prime\prime} \left(\prod P_i^{D_{i+1}\dot{C}_i}\right) \{4\ \epsilon\text{-Tensoren}\} + \ldots \end{aligned} \tag{2.2}$$

Der Strich an der Summe bedeutet hier jeweils, daß zwei der Impulse aus den Propagatorzählern wegzulassen sind und über alle Kombinationen fehlender Impulse zu summieren ist. Für je zwei solche fehlenden Impulse erhält man einen Faktor m_f^2 sowie zwei Epsilontensoren, von denen stets einer gepunktete und einer ungepunktete Indizes trägt. Die Indexstruktur der Summe aller Impulse im Term ohne explizite Fermionenmasse ist direkt ersichtlich. Für die höheren Terme gilt, daß hinter jedem fehlenden Propagator die Indizes in der folgenden Weise abgeändert werden müssen: $D_i\dot{C}_{i-1} \leftrightarrow D_i\dot{C}_{i+1}$. Die „reguläre“ Anordnung ist dabei durch den Term führender Ordnung in der Masse gegeben. Durch das Herausnehmen der Impulse fehlen den Summanden in ihrer Tensorstruktur Indizes, die jetzt von den Epsilon-Tensoren getragen werden. Dabei haben die C's und D's stets benachbarte Indizes, wobei immer die Gestalt $\epsilon^{\dot{C}_m\dot{C}_{m+1}}$ bzw. $\epsilon^{D_n D_{n-1}}$ zu wahren ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{QED}(n) = & \quad \widetilde{\textstyle\prod_{i=1}^{n-1}} P_i^{D_i\dot{C}_{i-1}} \epsilon^{\dot{C}_l\dot{C}_{l+1}} \\ & + m_f^2 \quad \widetilde{\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}}{}' \left(\prod P_i^{D_i\dot{C}_{i-1}}\right) \epsilon^{\dot{C}_k\dot{C}_{k+1}} \epsilon^{\dot{C}_m\dot{C}_{m+1}} \epsilon^{D_n D_{n-1}} \\ & + m_f^4 \quad \widetilde{\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}}{}'' \left(\prod P_i^{D_i\dot{C}_{i-1}}\right) \{5\ \epsilon\text{-Tensoren}\} + \ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Hier meint die Tilde über den Summen das Weglassen eines Impulsterms aus den Zählern der Propagatoren, während für das übrige die gleichen Bezeichnungen und Regeln gelten wie für $\mathcal{B}_{QED}(n)$. Die weitere Struktur der Summen und Produkte von Impulsen wird unter dem Gesichtspunkt der Massennäherung in Kapitel 4 erläutert.

Die beiden anderen Reihen erhält man aus der wichtigen Beziehung:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{QED}(n) &= -\left(\mathcal{A}_{QED}(n)^{\{C\leftrightarrow D\}}\right)^* \\ \mathcal{C}_{QED}(n) &= \left(\mathcal{B}_{QED}(n)^{\{C\leftrightarrow D\}}\right)^* \end{aligned} \tag{2.4}$$

Diese Relationen sind eine einfache Konsequenz der Paritätsinvarianz der QED und werden nur in einer verallgemeinerten Form auf die elektroschwache Theorie übertragbar sein. Sie folgen leicht, wenn man sich überlegt, daß die Paritätstransformation des Dirac-Bispinors in der chiralen Darstellung (s. hierzu (A.22)) durch die Multiplikation mit γ^0 bewerkstelligt wird, dieses also gerade obere und untere Komponenten des Bispinors austauscht. Man kann (2.1) auch anhand der expliziten Rechnungen in Abschnitt 4.2 nachvollziehen.

Den Vorfaktor, der alle Propagatornenner, die i's aus den Zählern der Propagatoren sowie die Vertexfaktoren der Fermion-Photon-Vertizes aufsaugt, kann man in einer geschlossenen Formel zusammenfassen, wieder im Falle von n Vertizes und $(n-1)$ Propagatoren,

$$\mathcal{P}_{QED}(n) = \frac{\mathrm{i}(-1)^{n+1} e^n \prod_{j=1}^n Q_{f_j}}{\prod_{i=2}^n \left(-2 \sum_{j=1}^n (p \cdot k_j) + 2 \sum_{j<k\,;j,k=1}^n (k_j \cdot k_k) \right)} \quad , \tag{2.5}$$

wenn auch dieser allgemeine Ausdruck für explizite (analytische) Rechnungen wenig hilfreich ist, da man dann aufgrund der Energie-Impuls-Erhaltung versucht, die Impulse der Propagatoren sowohl durch den einlaufenden als auch durch den auslaufenden Impuls auszudrücken.

2.2 Zur Frage der Wahl der Eichspinoren

Betrachtet man die Polarisationsspinoren für äußere massive Vektorbosonen (diese finden sich in Anhängen A und B), so sieht man, daß der Grenzübergang $m \to 0$ nicht existiert. Das ist einleuchtend, da die longitudinale Polarisationsrichtung eines masselosen Spin 1-Teilchens keinen physikalischen Freiheitsgrad darstellt. Dieser Freiheitsgrad äußert sich im masselosen Fall in der Beliebigkeit der Wahl der Eichung für die den beiden physikalischen Zuständen entsprechenden Polarisationsvektoren $\varepsilon^\mu_\pm$. Im Formalismus der WvdW-Spinoren macht sich dies in der freien Wahlmöglichkeit eines Eichspinors g_A bemerkbar, der für die Zustände positiver und negativer Helizität verschieden angesetzt werden darf.

Die Eichvektoren masseloser Spin 1-Teilchen haben nur die Bedingungen zu erfüllen, im orthogonalen (räumlichen) Komplement des Impulsvektors zu liegen sowie die Eigenschaft aufzuweisen, daß der Eichvektor positiver Helizität zu dem Eichvektor negativer Helizität konjugiert komplex sein muß. Benötigt wird das, damit die Amplituden die im nächsten Abschnitt zu diskutierenden diskreten Symmetrien der Quantenfeldtheorie erfüllen. Eine weiterhin bestehende Unbestimmtheit durch die freie Phasenwahl kann man dadurch eliminieren, daß man eine Normierungsbedingung für die beiden Eichvektoren positiver und negativer Helizität festlegt:

$$(\varepsilon_+(g_1) \cdot \varepsilon_-(g_2)) \equiv \varepsilon_+^\mu(g_1)\varepsilon_{-,\mu}(g_2) = -1. \tag{2.6}$$

Diese Bedingungen erweisen sich bereits als hinreichend, die Form der Eichvektoren und daraus die spinorielle Form festzulegen (s. [2]), für einlaufende Felder:

$$\varepsilon_{+,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2}\, g_{+,\dot{A}} k_B}{\langle g_+ k\rangle^*}\,, \qquad \varepsilon_{-,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2}\, k_{\dot{A}} g_{-,B}}{\langle g_- k\rangle}\,, \tag{2.7}$$

für auslaufende Felder dagegen:

$$\varepsilon^*_{+,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2}\, k_{\dot{A}} g_{+,B}}{\langle g_+ k\rangle}\,, \qquad \varepsilon^*_{-,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2}\, g_{-,\dot{A}} k_B}{\langle g_- k\rangle^*}\,. \tag{2.8}$$

Einen Nutzen aus der oben angesprochenen Freiheit der Eichung gewinnt man nun, indem man den Eichspinor so wählt, daß sich die analytischen Ausdrücke für die Amplituden weitestgehend vereinfachen. Dies ließe sich offensichtlich dadurch am günstigsten erreichen, daß man den Eichspinor proportional zu einem der bei der Zerlegung der Fermionen-Impulsvektoren auftretenden Spinoren κ_1 oder κ_2 annimmt. Der Nachteil dieser Methode ist, daß durch die aufgrund der Normierung im Nenner der Helizitätsspinoren stehenden Spinorprodukte unphysikalische Singularitäten entstehen können. Es sind dies die gleichen Pole, die auch im Formalismus masseloser Fermionen Probleme verursachen und deren Beseitigung eines der Anliegen des Einführens massiver Helizitätsamplituden war. Zwar heben sich die Singularitäten in den vollständigen Ausdrücken physikalisch observabler Größen wie Zerfallsbreiten und Wirkungsquerschnitten wieder heraus; sie können aber trotzdem Schwierigkeiten in der Gestalt numerischer Instabilitäten verursachen.

Der andere Extremfall ist, auf jegliche numerische Vereinfachungen zu verzichten und beispielsweise einen einem beliebigen, von der Kinematik des Prozesses unabhängigen lichtartigen Vektor zugeordneten Eichspinor zu wählen. Bei dieser Variante findet, wie schon angedeutet, keinerlei gegenseitiges Wegheben von Termen innerhalb einer Amplitude statt. Die analytischen Ausdrücke selbst bei einfachen Reaktionen nehmen dabei solch monströse Formen an, daß die Vorteile spinorieller Helizitätsamplituden für analytische Rechnungen wieder zunichte gemacht werden.

Wie so oft liegt die Lösung in der Mitte: Man wägt ab zwischen einer größtmöglichen analytischen Vereinfachung einerseits und dem expliziten Beseitigen der unphysikalischen Pole aufgrund der speziellen Eichspinorwahl andererseits. Ist die Zerlegung des Impulsvektors eines äußeren massiven Fermions nach der Basis seiner Eigenspinoren durch

$$P_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \kappa_{i,\dot{A}} \kappa_{i,B} \tag{2.9}$$

gegeben, dann wird das Gewünschte erreicht, indem man für beide Helizitäten den gleichen Eichspinor nimmt, nämlich den mit dem Impuls des Photons kontrahierten Impulsspinor des äußeren Fermions:

$$g_A = P_{A\dot{B}} k^{\dot{B}} = \sum_{i=1,2} \kappa_{i,A} \left\langle \kappa_i k \right\rangle^* . \tag{2.10}$$

Damit ergibt sich für die Normierungsfaktoren in den Nennern der Helizitätsspinoren

$$\langle gk \rangle = k^A P_{A\dot{B}} k^{\dot{B}} = 2(p \cdot k). \tag{2.11}$$

Dies hat die gleiche Struktur wie ein Propagatornenner, der, massive Fermionen vorausgesetzt, keine Pole aufweisen kann. Trotzdem können hier noch numerische Instabilitäten auftreten, wenn das Vektorprodukt (2.10) für extreme Anordnungen der kinematischen Variablen im Phasenraum klein gegenüber den Massen oder anderen Invarianten wie den Mandelstam-Variablen wird; durch die spezielle Wahl des Eichspinors ist aber garantiert, daß sich die gefährlichen Terme analytisch kürzen. Beispiele dazu finden sich in [1].

Bei der Entwicklung der Amplituden nach den Fermionenmassen treten einige Subtilitäten bezüglich der Benutzung dieser Eichspinorwahl auf, auf die an späterer Stelle eingegangen wird.

2.3 Diskrete Symmetrien

In der Quantenfeldtheorie spielen diskrete Symmetrien eine wichtige Rolle; sie generieren Erhaltungssätze für multiplikative Quantenzahlen. Man kann sie nutzen, um analytische Ausdrücke auf ihre Richtigkeit zu überprüfen oder sich Arbeit sparen, indem man nur einen Basissatz von Helizitätsamplituden ausrechnet und sich die übrigen Kombinationen mittels Crossing-Symmetrie, Parität oder CP-Symmetrie verschafft.

2.3.1 Crossing Symmetrie

Die Crossing-Symmetrie setzt Amplituden in Relation, bei denen einlaufende Teilchen und auslaufende Antiteilchen gegeneinander ausgetauscht wurden. Bezeichnet k den Impuls des einlaufenden Teilchens, kann man die Crossing-Symmetrie durch die Ersetzung $k \to -k$ verwirklichen. In Gestalt der Spinoren läßt sich das folgendermaßen übertragen:

$$\kappa_{i,\dot{A}} \to -\kappa_{i,\dot{A}}, \qquad \kappa_{i,A} \to +\kappa_{i,A} \tag{2.12}$$

Es werden also nur die gepunkteten Spinoren in ihrem Vorzeichen abgewandelt, die ungepunkteten bleiben erhalten. Die Crossing Symmetrie vertauscht gerade Anfangs- mit Endzuständen in Amplituden; dadurch entstehen Vorzeichenwechsel, die man entweder aus den Regeln zur Bildung der störungstheoretischen Terme oder mittels Vergleich der expliziten Einteilchen-Wellenfunktionen (s. Anhang A) der beteiligten Teilchen extrahiert. Man findet dabei, daß die Crossing Symmetrie die Attribute

$$\begin{array}{rcl} \text{einlaufend} & \longleftrightarrow & \text{auslaufend,} \\ \text{Teilchen} & \longleftrightarrow & \text{Antiteilchen,} \\ \text{positive Helizität} & \longleftrightarrow & \text{negative Helizität} \end{array}$$

vertauscht. Allerdings hat man noch diverse Vorzeichenwechsel zu beachten, einen Faktor (-1) für jedes gekreuzte Spin 1-Teilchen und bei Fermionen ein Vorzeichen $\pm\,\mathrm{sgn}(\sigma)$, „$+$“ für einlaufende, „$-$“ für auslaufende Fermionen.

2.3.2 Parität

Nicht in allen Quantenfeldtheorien ist die Parität eine Symmetrie: In der QED wie auch in der QCD ist sie erhalten, die elektroschwache Theorie ist das Paradebeispiel einer Theorie mit Paritätsverletzung. Arbeitet man allerdings mit einer Theorie mit erhaltener Parität (hier: QED), dann hat man eine Relation zur Hand, die Helizitätsamplituden mit denjenigen in Relation setzt, bei denen alle Helizitäten invertiert sind. Dabei hat man lediglich zu berücksichtigen, daß alle räumlichen Komponenten der Impulse zu spiegeln sind, sowie ein gesamter Phasenfaktor für die Amplitude hinzugefügt werden muß. Betrachtet man die der Lorentz-Gruppe unterliegende Algebra, erkennt man, daß durch die Paritätstransformation gerade die Spinoren ψ_A und $\psi^{\dot{A}}$

ausgetauscht werden. Das Umkehren der Helizitäten läßt sich folglich im wesentlichen durch das Komplex-Konjugieren der Amplitude bewerkstelligen.

In Formeln ausgedrückt, stellt sich die Paritätstransformation folgendermaßen dar: Für eine Amplitude $\mathrm{i}\mathcal{M}(\sigma_i;\lambda_j)$ eines Prozesses mit n Fermionen und $\bar{n}$ Antifermionen mit Helizitäten σ_i und n_V Vektorbosonen mit Helizitäten λ_j gilt

$$\mathcal{M}(-\sigma_i;-\lambda_j) = (-1)^{\bar{n}}\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_{n+\bar{n}})\mathcal{M}(\sigma_i;\lambda_j)^* \tag{2.13}$$

für Baumdiagramme. Hier und im folgenden bedeutet $\mathrm{sgn}(\prod_i \sigma_i)$ das Vorzeichen des Produktes der Helizitäten der aufgeführten Teilchen. In paritätsverletzenden Theorien kann man dies verallgemeinern, wenn die rechts- und linkshändigen Kopplungen ausgetauscht werden.

$$\mathcal{M}(-\sigma_i;-\lambda_j) = (-1)^{\bar{n}}\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_{n+\bar{n}})\mathcal{M}(\sigma_i;\lambda_j)^*\big|_{(g^{\pm}_{\dots})^*\leftrightarrow(g^{\mp}_{\dots})}\,. \tag{2.14}$$

Die genaue Herleitung dieser Formeln unter dem speziellen Gesichtspunkt der WvdW-Spinoren findet sich im Anhang von [1].

2.3.3 CP-Symmetrie

Als Hintereinanderausführung von Parität oder Raumspiegelung und der Ladungskonjugation (Vertauschung von Teilchen und Anti-Teilchen) verbindet die CP-Symmetrie die Amplitude eines Prozesses mit der konjugiert komplexen Amplitude des Prozesses der zugehörigen Antiteilchen mit den gespiegelten Helizitäten. Bezeichnen $\mathrm{i}\mathcal{M}(\sigma_i;\lambda_j)$ bzw. $\mathrm{i}\overline{\mathcal{M}}(\sigma_i;\lambda_j)$ die Amplitude eines Prozesses und des entsprechenden CP-konjugierten Prozesses mit sinngemäß zugeordneten Helizitäten, so erhält man (s. [1]) für die jeweiligen Matrixelemente die folgende Beziehung:

$$\overline{\mathcal{M}}(-\sigma_i;-\lambda_j) = (-1)^{n_V+n_{in}+\bar{n}_{in}}\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_{n+\bar{n}})\mathcal{M}(\sigma_i;\lambda_j)^*, \tag{2.15}$$

wiederum auf *tree-level*; $n_{in}+\bar{n}_{in}$ ist dabei die Gesamtzahl der einlaufenden Fermionen und Antifermionen.

2.4 Erweiterung auf das Standardmodell

Der entscheidende Unterschied der elektroschwachen Theorie gegenüber der QED ist das Auftreten massiver Eichbosonen aufgrund der spontanen Symmetriebrechung der Eichtheorie. Weiterhin tritt eine Paritätsverletzung auf, die historisch eines der wichtigsten Indizien auf dem Weg zur richtigen Beschreibung der schwachen Phänomene durch eine Quantenfeldtheorie war.

Als weitergehendes, neues Element kommt jetzt noch die Möglichkeit des Austausches von W- und Z-Bosonen vor. Für innere Linien bedeutet das nur eine geringfügige Abwandlung der Vektorboson-Propagatoren bezüglich der Masse im Nenner, die äußeren W- und Z-Bosonen müssen als massiv betrachtet werden. Der zusätzliche Freiheitsgrad der longitudinalen Polarisation der massiven Vektorbosonen ist gerade derjenige, der bei dem Grenzübergang $m \to 0$ in den Freiheitsgrad der beliebigen Wahl des Eichspinors übergeht. Dieses Problem wird hier nicht untersucht.

Weiterhin erweist sich als beste Strategie zur Ermittlung des analytischen Ausdrucks einer Amplitude das Wandern entlang der Fermionenlinien. Hierbei können nun neben den Fermion-Photon-Vertizes auch Fermion-W- und Fermion-Z-Vertizes vorkommen, die gegenüber dem Fermion-Photon-Vertex die Besonderheit aufweisen, entweder über verschiedene Kopplungen an rechts- und links-händige Fermionkomponenten (Z) oder nur über Kopplungen an linkshändige Komponenten (W) zu verfügen.

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, daß durch Emission oder Absorption eines W-Bosons der Flavour des Fermions geändert wird, d.h. ein Lepton (Elektron, Myon, Tauon) in sein zugehöriges Neutrino umgewandelt wird bzw. die (zudem noch Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-gemischten) Quarkzustände ineinander übergehen. Hier muß man also explizit notieren, welches Teilchen gerade an einer betrachteten Stelle einer Fermionenlinie propagiert. Die jeweils unterschiedlichen Massen der Fermionen gehen in die Nenner der Propagatoren und damit in den unter (2.5) definierten kinematischen Faktor $\mathcal{P}(n)$ ebenso wie in deren Zähler ein. In den Potenzreihen in den Massen der Fermionen (2.2/3) muß jetzt zwischen den verschiedenen Fermionenmassen unterschieden werden. Zudem ist an jedem Vertex für die Kopplung an die rechts- bzw. linkshändigen Fermionenkomponenten ein expliziter Faktor mitzunehmen.

Um diese Verallgemeinerung der QED-Amplitude adäquat beschreiben zu können, muß man erst einmal eine neue Nomenklatur für die vorkommenden Terme einführen, aus denen eine solche elektroschwache Amplitude aufgebaut ist.

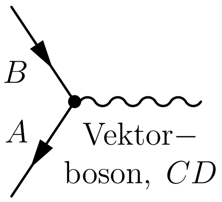
Zur Systematik der Massenterme aufgrund der Zähler der Propagatoren dient die Größe

$$M^r_{[\{r\ \text{Massenindizes}\}]}, \tag{2.16}$$

wobei die r Indizes in den eckigen Klammern angeben, aus den Massen welcher Teilchen der Term mit der r-ten Potenz gebildet wird. Zum Beispiel bedeutet

$$M^7_{[1|2|2|2|5|6|11]} = m_1 \cdot m_2^3 \cdot m_5 \cdot m_6 \cdot m_{11} \tag{2.17}$$

In einer Theorie mit verschiedenen Kopplungen an rechts- und linkshändige Fermionenkomponenten hat der allgemeine Fermion-Vektorboson-Vertex die Gestalt



$$= \begin{pmatrix} 0 & K_- \delta^{\dot{C}}_{\dot{B}} \delta^D_A \\ K_+ \epsilon^{\dot{A}\dot{C}} \epsilon^{BD} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Um die jeweiligen Vertex-Faktoren aufzusammeln, definiert man ein Symbol

$$K^{[\{m\,\text{positive Kopplungs−Indizes}\}]}_{[\{n\,\text{negative Kopplungs−Indizes}\}]}, \tag{2.19}$$

wobei die in der oberen eckigen Klammer stehenden Indizes aussagen, daß man von den Vertizes dieser Nummern die Kopplungsfaktoren der Vektorbosonen an die rechtshändigen Fermionenkomponenten zu nehmen hat, während in der unteren eckigen Klammer die Nummern der Vertizes aufgeführt sind, von denen die Kopplungsfaktoren der Vektorbosonen an die linkshändigen Fermionenkomponenten mitzunehmen sind. Als Kopplungsterme resultieren aus den Feynman-Regeln für das Photon

$$K^\gamma_+ \equiv K^\gamma_- = \mathrm{i}eQ_f, \tag{2.20}$$

für das Z-Boson

$$K^Z_+ = \mathrm{i}eQ_f \frac{s_W}{c_W}, \qquad K^Z_- = -\mathrm{i}e \left(-Q_f \frac{s_W}{c_W} + \frac{I_{W,f}}{s_W c_W} \right), \tag{2.21}$$

sowie für das W-Boson

$$K^W_+ = 0, \qquad K^W_- = \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}. \tag{2.22}$$

Dabei bedeuten c_W und s_W den Kosinus und Sinus des Weinberg-Winkels θ_W, der die Stärke der Mischung der fundamentalen Eichfelder B^μ und W^μ_0 zu den physikalischen Teilchen Z^0 und γ beschreibt. Die Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung wird wie üblich mit e abgekürzt, die der schwachen Wechselwirkung mit g, wobei die Relation $e = g \cdot \sin\theta_W$ besteht. Die Größe $I_{W,f}$ im zweiten Term der Kopplung des Z-Bosons an die negative Helizität ist der schwache Isospin.

Nach diesem so eingeführten Schema bedeutet zum Beispiel

$$K^{[3|4|7|8]}_{[1|2|5|6|9|10]} \equiv K^1_- K^2_- K^3_+ K^4_+ K^5_- K^6_- K^7_+ K^8_+ K^9_- K^{10}_-, \tag{2.23}$$

wobei hier die Zahlen (obere Indizes) an den Kopplungsfaktoren die „kanonische“ Numerierung der Vertizes bezeichnet. Wie nicht anders zu erwarten, wird die Struktur der Spinorindizes an den Impulsspinoren und den ε-Tensoren die gleiche sein wie im Falle der QED, so daß sie hier im weiteren nicht mehr explizit ausgeschrieben wird. Die Regeln zum Setzen der verschiedenen $\dot{C}_i$ und D_j sind dieselben wie bei den quantenelektrodynamischen Amplituden und können von dort übernommen werden.

Für eine Amplitude in der elektroschwachen Theorie ergibt sich nach einer ähnlichen Hintereinanderschaltung der Kombination Propagator/Vertex die Struktur (wiederum ohne die äußeren fermionischen Helizitätszustände)

$$\begin{pmatrix} m_f \delta^{D_1}_{A_1} \epsilon^{B_n D_n} \mathcal{A}_{SM}(n) & \delta^{D_1}_{A_1} \delta^{\dot{C}_n}_{\dot{B}_n} \mathcal{B}_{SM}(n) \\ \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \epsilon^{B_n D_n} \mathcal{C}_{SM}(n) & m_f \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \delta^{\dot{D}_n}_{\dot{B}_n} \mathcal{D}_{SM}(n) \end{pmatrix} \mathcal{P}_{SM}(n). \tag{2.24}$$

Das Suffix „SM“ an dieser Stelle steht für „Standardmodell“ und besagt, daß diese Formel auch für allgemeinere Amplituden im Rahmen des Standardmodells Gültigkeit besitzt, das heißt, wenn es sich bei den Fermionen um Quarks handelt, wird der eventuelle Austausch von Gluonen mitberücksichtigt. Da die Quantenchromodynamik (QCD) eine die Parität erhaltende Theorie ist, sind die Kopplungsfaktoren für Quark-Gluon-Vertizes dieselben, unabhängig von der Quarkhelizität:

$$K^g_+ \equiv K^g_- = \mathrm{i} g_s T^a_{ij}. \tag{2.25}$$

g_s ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung, T^a_{ij} die Fundamentaldarstellung eines Generators der $SU(3)_C$ der QCD, die das Gluon der Farbe a an die beiden Quarks der Farben i und j koppelt. Man hat dann zu beachten, daß Quark- und Gluon-Propagatoren diagonal in den Farbfreiheitsgraden sind. Die Kopplungen der W-Bosonen an Quarks sind analog zu denen an Leptonen (s. (2.22)), man hat aber noch das zugehörige Matrixelement der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) hinzuzufügen (s. Anhang C). Von den Besonderheiten der QCD wird im weiteren nicht mehr die Rede sein, es werden nur noch elektroschwache Prozesse betrachtet.

Da, wie bereits erwähnt, die Struktur der Spinorindizes unverändert im Vergleich zur QED ist, ist es sinnvoll, auch die explizite Form der Impulsterme aus den Zählern der Propagatoren in einer Abkürzung zu verpacken. Dazu benutzt man

$$P([n\,\mathrm{Propagatorindizes}]), \tag{2.26}$$

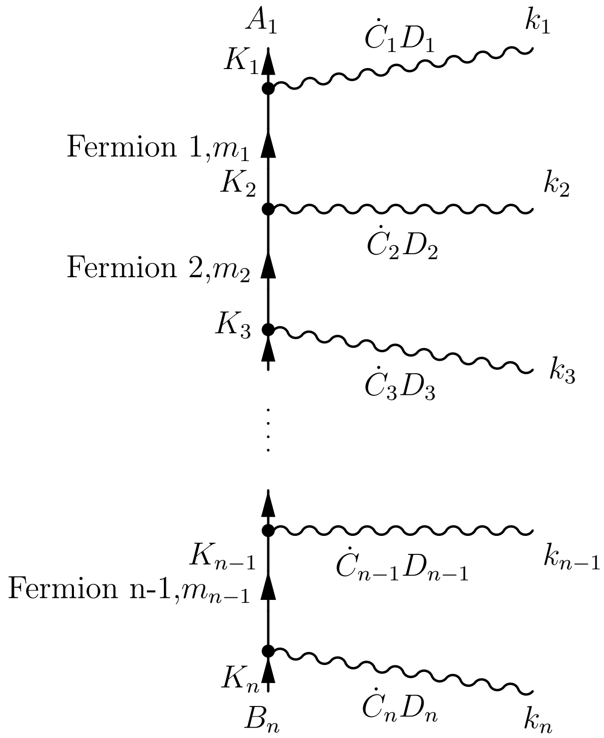


Abbildung 2.2: Verallgemeinerung der Fermionenlinie auf das Standardmodell, d.h. Berücksichtigung der Kopplungen von W- und Z-Bosonen bzw. Gluonen

welches in einem Beispiel für den Ausdruck

$$P(1|2|4|7|11|12|17) \equiv P_1^{\dot{C}D} P_2^{\dot{C}D} P_4^{\dot{C}D} P_7^{\dot{C}D} P_{11}^{\dot{C}D} P_{12}^{\dot{C}D} P_{17}^{\dot{C}D} \tag{2.27}$$

steht, worin natürlich die Indizes an den C's und D's nach den schon im Abschnitt über Quantenelektrodynamik zusammengefaßten Regeln zu setzen sind.

Aus der Systematik der Diagramme (Fermionenlinien) kann man die Rechenregeln für $\mathcal{A}(n)$ und $\mathcal{B}(n)$ extrahieren. Demnach verfügt der „masselose“ Term $\mathcal{O}(1)$ in $\mathcal{B}(n)$ nur über „negative“ Vertexfaktoren, also Kopplungsfaktoren an die linkshändigen Fermionenkomponenten an allen Vertizes. Bei den Termen höherer Ordnung in der Masse gilt, daß weiterhin alle Vertexfaktoren (es müssen in jedem Summanden stets Vertexfaktoren von allen Vertizes vorkommen!) unter Einschluß des Vertexfaktors, der den gleichen Index trägt, wie der erste fehlende Impuls aus den Propagatorzählern ein negatives Vorzeichen tragen. Jeder Vertexfaktor, der den gleichen Index aufweist wie ein fehlender Impuls, übernimmt also das Vorzeichen des vorhergehenden Faktors, die darauffolgenden bekommen das andere Vorzeichen. Durch Einsetzen eines Massenterms findet ein Spinflip statt. Fehlen mehrere Impulse mit aufeinanderfolgenden Indizes, wechselt das Vorzeichen der Vertexfaktoren also ständig. Die führenden Terme in der Entwicklung ($\mathcal{O}(m^2)$, nur diese werden später in der Massenentwicklung von Interesse sein) enthalten also bis zum ersten fehlenden Impuls einschließlich nur negative Vertexfaktoren, dann bis zum zweiten fehlenden Impuls (einschließlich) positive Vertexfaktoren, nach dem fehlenden wieder negative. (Man sollte immer in Erinnerung haben, daß es einen Vertex mehr als zwischengeschaltete Fermionenpropagatoren gibt, so daß die Indizes der Vertexfaktoren stets um eins weiterlaufen als die der Impulse.)

Ohne jede Einschränkung ist dieser Sachverhalt auch auf $\mathcal{A}(n)$ übertragbar, nur daß hier die Zahl der fehlenden Impulsterme aus den Propagatorzählern nur ungerade sein kann.

Die Massenterme müssen jeweils gerade die Propagatorindizes der fehlenden Impulse tragen, da bei der Matrixmultiplikation aus jeder einzelnen Matrix (für die Propagatoren) nur ein Matrixelement, und damit *entweder* ein Impuls *oder* ein Massenfaktor zu den vier endgültigen Termen $\mathcal{A}(n)$, $\mathcal{B}(n)$, $\mathcal{C}(n)$ bzw. $\mathcal{D}(n)$ beitragen kann. Folglich sind die Indizes von (2.16) und (2.26) sozusagen komplementär.

Der Vorfaktor $\mathcal{P}(n)$ in (2.5), in dem alle vorkommenden Faktoren aus den Vertizes und Propagatoren vereint werden, muß ebenfalls leicht abgewandelt werden. Im Zähler müssen die elektromagnetische Kopplungskonstante e und die Ladungen der Teilchen verschwinden, da diese in den Kopplungsfaktoren der Vertizes stecken und damit in den K-Faktoren in (2.23) zusammengefaßt werden. Für die Terme im Nenner hat man zu beachten, daß die Teilchen durch Emission oder Absorption von W-Bosonen ihre Identität ändern können. Somit treten dann auch unterschiedliche Massen in den Propagatornennern auf, so daß man am besten die gleiche Abkürzung wie in den Zählern der Propagatoren verwendet und die Impulse der propagierenden Teilchen einfach durchnumeriert:

$$\mathcal{P}_{SM}(n) = \frac{\mathrm{i}\,(-1)^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n-1}(P_i^2 - m_i^2)} \tag{2.28}$$

Um die etwas abstrakten Erklärungen mit Leben zu versehen, ist hier am schon recht aufwendigen Beispiel einer Fermionenlinie mit sieben Vektorboson-Vertizes die Struktur der Terme $\mathcal{A}(7)$ und $\mathcal{B}(7)$ ausführlich dargestellt. Der Länge der Formel halber wird auf das Ausschreiben der einzelnen Massen verzichtet, die aber an den Propagatoren (besser gesagt: den nicht vorhandenen) abzulesen sind, und diese daher etwas schlampig in der Form $m^j, j \in \{1,\ldots 7\}$ ausgeklammert. Die Lorentzstruktur des Ausdrucks (Spinorindizes) wird aus oben besprochenen Gründen ebenfalls außer Acht gelassen. Auch die ϵ-Tensoren werden nur zusammengefaßt als $\epsilon^j, j \in \{1, \ldots 7\}$ notiert. Da hier keine zweistelligen Indizes vorkommen, werden die Querstriche zur Trennung der Indizes zu guter letzt auch noch unterschlagen. Die Unterschiede in den Potenzen von ϵ und m zwischen $\mathcal{A}(n)$ und $\mathcal{B}(n)$ kommen dadurch zustande, daß eine Massenpotenz in $\mathcal{A}(n)$ explizit herausgezogen wurde (s. (2.24)).

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{SM}(7) = \quad & \epsilon \cdot \Big[P(12345)K^{[7]}_{[123456]} + P(12346)K^{[67]}_{[12345]} + \\
& \quad P(12356)K^{[567]}_{[1234]} + P(12456)K^{[4567]}_{[123]} + \\
& \quad P(13456)K^{[34567]}_{[12]} + P(23456)K^{[234567]}_{[1]}\Big] \\
& + m^2\epsilon^3 \cdot \Big[P(123)K^{[57]}_{[12346]} + P(124)K^{[457]}_{[1236]} + P(125)K^{[47]}_{[12356]} + \\
& \quad P(126)K^{[467]}_{[1235]} + P(134)K^{[3457]}_{[126]} + P(135)K^{[347]}_{[1256]} + \\
& \quad P(136)K^{[3467]}_{[125]} + P(145)K^{[37]}_{[12456]} + P(146)K^{[367]}_{[1245]} + \\
& \quad P(156)K^{[3567]}_{[124]} + P(234)K^{[23457]}_{[16]} + P(235)K^{[2347]}_{[156]} + \\
& \quad P(236)K^{[23467]}_{[15]} + P(245)K^{[237]}_{[1456]} + P(246)K^{[2367]}_{[145]} + \\
& \quad P(256)K^{[23567]}_{[14]} + P(345)K^{[27]}_{[13456]} + P(346)K^{[267]}_{[1345]} + \\
& \quad P(356)K^{[2567]}_{[134]} + P(456)K^{[24567]}_{[13]}\Big] \\
& + m^4\epsilon^5 \cdot \Big[P(1)K^{[357]}_{[1246]} + P(2)K^{[2357]}_{[146]} + P(3)K^{[257]}_{[1346]} + \\
& \quad P(4)K^{[2457]}_{[136]} + P(5)K^{[247]}_{[1356]} + P(6)K^{[2467]}_{[135]}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{SM}(7) = {} & P(123456)K^{[-]}_{[1234567]} \\
& + m^2\epsilon^2 \Big[P(1234)K^{[6]}_{[123457]} + P(1235)K^{[56]}_{[12347]} + P(1236)K^{[5]}_{[123467]} + \\
& \qquad P(1245)K^{[456]}_{[1237]} + P(1246)K^{[45]}_{[12367]} + P(1256)K^{[4]}_{[123567]} + \\
& \qquad P(1345)K^{[3456]}_{[127]} + P(1346)K^{[345]}_{[1267]} + P(1356)K^{[34]}_{[12567]} + \\
& \qquad P(1456)K^{[3]}_{[124567]} + P(2345)K^{[23456]}_{[17]} + P(2346)K^{[2345]}_{[167]} + \\
& \qquad P(2356)K^{[234]}_{[1567]} + P(2456)K^{[23]}_{[14567]} + P(3456)K^{[2]}_{[134567]} \Big] \\
& + m^4\epsilon^4 \Big[P(12)K^{[46]}_{[12357]} + P(13)K^{[346]}_{[1257]} + P(14)K^{[36]}_{[12457]} + \\
& \qquad P(15)K^{[356]}_{[1247]} + P(16)K^{[35]}_{[12467]} + P(23)K^{[2346]}_{[157]} + \\
& \qquad P(24)K^{[236]}_{[1457]} + P(25)K^{[2356]}_{[147]} + P(26)K^{[235]}_{[1467]} + \\
& \qquad P(34)K^{[26]}_{[13457]} + P(35)K^{[256]}_{[1347]} + P(36)K^{[25]}_{[13467]} + \\
& \qquad P(45)K^{[2456]}_{[137]} + P(46)K^{[245]}_{[1367]} + P(56)K^{[24]}_{[13567]} \Big] \\
& + m^6\epsilon^6 K^{[246]}_{[1357]}
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Für die Berechnung der beiden anderen Terme, $\mathcal{C}(n)$ und $\mathcal{D}(n)$ ist eine Verallgemeinerung der Relation (2.4) vonnöten, da die Amplituden jetzt selbstverständlich nicht mehr paritätsinvariant sind. Man hat jedoch lediglich zu beachten, daß bei einer Paritätstransformation die beiden Kopplungsfaktoren K_+ und K_- ausgetauscht werden. Insgesamt hat man dann

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{QED}(n) &= -\left(\mathcal{A}_{QED}(n)^{\{C\leftrightarrow D\}}\right)^*_{\{K_+\leftrightarrow K_-\}} \\
\mathcal{C}_{QED}(n) &= \left(\mathcal{B}_{QED}(n)^{\{C\leftrightarrow D\}}\right)^*_{\{K_+\leftrightarrow K_-\}}
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Mit diesen Vorschriften ist es nun möglich, beliebige Amplituden im Rahmen des Standardmodells unter Mitnahme der vollen Fermionenmassen aufzuschreiben und analytisch zu bestimmen.

Kapitel 3

Entwicklung der Massenterme

3.1 Massiver Impulsvektor - nach masselosen Spinoren entwickelt

Durch Kontraktion eines zeitartigen Minkowski-Vektors mit dem Spintensor 2. Stufe $\sigma^{\mu}_{\dot{A}B}$ erhält man eine Darstellung dieses Vektors in der Spinorbasis. Formal ist der Vektor nun eine 2×2-Matrix; diese kann jetzt wiederum in ihrer Eigenbasis dargestellt werden:

$$K_{\dot{A}B} = k^{\mu}\sigma_{\mu,\dot{A}B} = \begin{pmatrix} k^0 + k^3 & k^1 + \mathrm{i}k^2 \\ k^1 - \mathrm{i}k^2 & k^0 - k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\dot{1}1} & K_{\dot{1}2} \\ K_{\dot{2}1} & K_{\dot{2}2} \end{pmatrix} = \sum_{i=1,2} \lambda_i n_{i,\dot{A}} n_{i,B} \tag{3.1}$$

mit den Eigenwerten und Eigenspinoren

$$\lambda_{1,2} = k^0 \pm |\vec{k}|, \qquad n_{1,A} = \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad n_{2,A} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{+\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Die hier auftretenden Winkel sind der polare Winkel θ und der azimutale ϕ gewöhnlicher Kugelkoordinaten. Durch die Definition

$$K_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \kappa_{i,\dot{A}}\kappa_{i,B}, \quad \kappa_{i,A} = \sqrt{\lambda_i} n_{i,A} \tag{3.3}$$

vereinfacht sich die Notation zusätzlich. Es gelten die folgenden Beziehungen für diese Spinoren:

$$\langle n_i n_i \rangle = 0, \qquad \langle n_2 n_1 \rangle = -\langle n_1 n_2 \rangle = +1, \tag{3.4}$$

bzw.

$$\langle\kappa_i\kappa_i\rangle = 0, \qquad \langle\kappa_2\kappa_1\rangle = -\langle\kappa_1\kappa_2\rangle = \sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{k^2} = +m_f. \tag{3.5}$$

Weiterhin von Nutzen ist die Relation

$$\det(K_{\dot{A}B}) = \lambda_1\lambda_2 = k^2. \tag{3.6}$$

Einen Spezialfall stellen lichtartige Vektoren dar, für die der zweite Eigenwert λ_2 verschwindet. Die Matrix $K_{\dot{A}B}$ ist dann also ein dyadisches Produkt zweier Spinoren 1. Ordnung:

$$K_{\dot{A}B} = k^\mu\sigma_{\mu,\dot{A}B} = k_{\dot{A}}k_B, \quad k_A = \sqrt{2k^0}n_{1,A} = \sqrt{2k^0}\begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Wie kann man nun einen zeitartigen Minkowski-Vektor in spinorieller Form nach der im Hochenergiefall kleinen Größe des Verhältnisses des Betrages seiner räumlichen Komponente zu seiner Nullkomponente entwickeln? Sinn macht dies nur, wenn der „auf der Massenschale sitzende“ Vektor sich weit weg vom Ursprung befindet, d.h. an der Stelle des Minkowski-Raumes, wo sich Lichtkegel und Massenschalen-Hyperboloid schon stark angenähert haben. Es ist stets möglich, einen beliebigen lichtartigen Vektor zu finden, der mit dem zu betrachtenden zeitartigen Vektor k^μ nichtverschwindendes Skalarprodukt besitzt. Nennt man diesen Vektor a^μ, dann hat man eine Zerlegung des ursprünglichen „massiven“ Vektors in lichtartige Vektoren gefunden, wenn man einen Faktor $\alpha \equiv k^2/2(a\cdot k)$ einführt und $b^\mu = k^\mu - \alpha a^\mu$ ansetzt. Der Vektor b^μ in der Zerlegung $k^\mu = \alpha a^\mu + b^\mu$ ist dann automatisch ein lichtartiger Vektor. Baut man sich jetzt mittels des oben besprochenen Schemas aus diesen lichtartigen Vektoren Spinoren gemäß (3.7), dann hat man den Spinor 2. Stufe $K_{\dot{A}B}$ eines massiven Impulsvektors in die Summe der Tensorprodukte der Impulsspinoren zweier masseloser Vektoren zerlegt:

$$K_{\dot{A}B} = \left(\sqrt{\alpha}\,a_{\dot{A}}\right)\left(\sqrt{\alpha}\,a_B\right) + b_{\dot{A}}b_B \quad , \tag{3.8}$$

wobei a_A und b_A die den Vektoren a^μ und b^μ gemäß (3.7) entsprechenden WvdW-Spinoren sind. Verwendet man diese Zerlegung in den Helizitätsamplituden, erhält man also (ohne Berücksichtigung „innerer“ Impulse aus den Zählern der Propagatoren) pro Fermionenlinie innerhalb des Prozesses die vierfache Anzahl an Termen gegenüber dem Fall masseloser Fermionen.

Natürlich ist die Zerlegung eines Spinors 2. Stufe als Darstellung einer Summe von zeitartigen Minkowski-Vektoren nicht eindeutig, man kann leicht

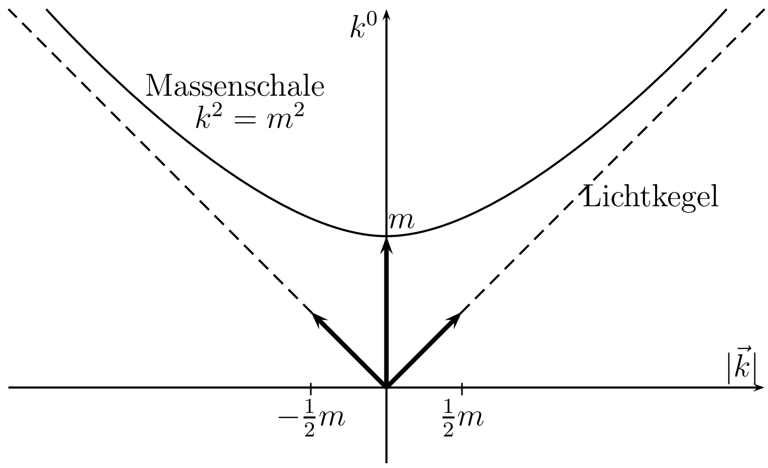


Abbildung 3.1: Zerlegung eines massiven Impulsvektors im Ruhesystem gemäß (3.8)

durch geeignete Linearkombination des ursprünglichen (zeitartigen) Vektors mit einem beliebigen anderen lichtartigen Vektor eine andere solche Zerlegung wie oben erhalten. Dennoch gibt es gewissermaßen eine „kanonische“ Zerlegung für den Impulsvektor eines massiven Teilchens im Labor. Boostet man sich entgegen der Flugrichtung des Teilchens im Laborsystem in dessen Ruhesystem, erhält man den Vektor $(m, 0, 0, 0)^T$. Für diesen Vektor (im Ruhesystem) existiert nun eine (bis auf rein räumliche Rotationen) eindeutige Zerlegung in zwei lichtartige Vektoren, nämlich

$$\begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m \\ \frac{1}{2}m\vec{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m \\ -\frac{1}{2}m\vec{n} \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

wobei $\vec{n}$ ein frei zu wählender Vektor auf der Einheitskugel ist (s. Abbildung 3.1). Diese Freiheit schränkt man dadurch ein, daß man $\vec{n}$ in die Richtung legt, in die man boosten muß, um den Vektor k^μ im Laborsystem wieder zu erhalten. Die beiden Vektoren $(1, \vec{n})^T$ und $(1, -\vec{n})^T$ sind beide Eigenvektoren der entsprechenden Boostmatrix zu den Eigenwerten $\gamma(1 \pm \beta)$, wobei $\beta = |\vec{k}|/k^0$ und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1}$ die üblichen relativistischen Faktoren sind.

$$\begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Boost}} k^\mu = k^\mu_+ + k^\mu_- \tag{3.10}$$

Anhand der Abbildungen 3.1 und 3.2 kann man sich die qualitativen Verhältnisse der auftretenden Vektoren veranschaulichen. Im Hochenergie-Bereich liegen der auf der Massenschale sitzende Vektor k^μ und der aus der

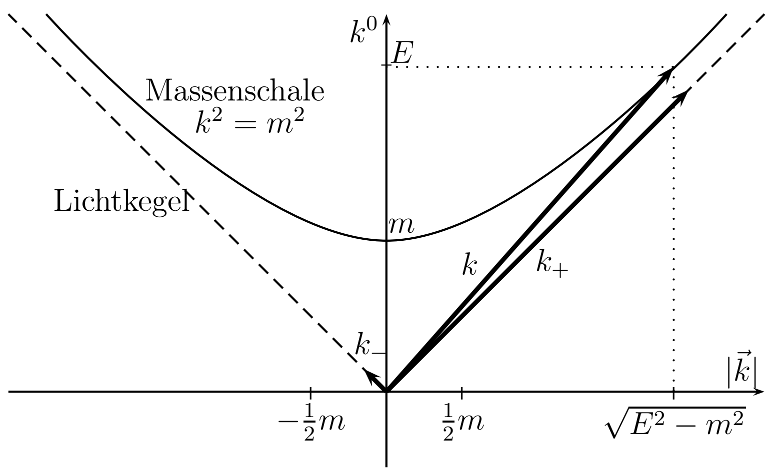


Abbildung 3.2: Boosten des nach (3.8) zerlegten Vektors zurück in das Laborsystem. Dabei nähert sich k_+ immer mehr dem massiven Vektor an, während k_- mehr und mehr schrumpft.

Zerlegung (3.8) mittels Boost gewonnene Vektor k_+^μ bereits sehr dicht zusammen. Während der Vektor k_+^μ durch den Boost auf dem Lichtkegel immer weiter in den Außenbereich gezogen wird, in welchem Massenschale und Lichtkegel sich stärker und stärker annähern, verkümmert der zweite aus der Zerlegung stammende Vektor k_-^μ immer weiter, bis er im Grenzfall eines „unendlichen Boosts“ schließlich völlig verschwindet (In diesem Fall sind dann k^μ und k_+^μ im Unendlichen identisch und k^μ ist formal zu einem masselosen Impulsvektor geworden).

Kontrahiert man die beiden Eigenvektoren k_+^μ und k_-^μ mit dem Spintensor $\sigma_{\mu,\dot{A}B}$, gelangt man dann zu den beiden unter (3.2) angeführten Spinoren $n_{1,A}$ und $n_{2,A}$. Die in (3.8) eingeführte Zerlegung mit der speziellen Wahl (3.9) ff. der Vektoren a^μ und b^μ führt demnach auf eine zu (3.3) analoge Zerlegung von $K_{\dot{A}B}$ mittels der Einheitsspinoren (3.2). Da diese eine Spinorbasis bilden, müssen die Quadrate der Eigenwerte λ_i und die mit der Masse multiplizierten Faktoren $\gamma(1 \pm \beta)$ übereinstimmen. Davon überzeugt man sich leicht:

$$m\gamma(1 \pm \beta) = m\gamma \left(1 \pm \frac{|\vec{k}|}{k^0}\right) = k^0 \left(1 \pm \frac{|\vec{k}|}{k^0}\right) = (k^0 \pm |\vec{k}|).$$

Wie man erkennt, ist die oben angegebene Zerlegung eines massiven Impulsvektors nach seinen Eigenspinoren in gewisser Weise ausgezeichnet. Führt man den Grenzübergang verschwindender Masse durch, so daß die Impulsvektoren lichtartig werden, nähert sich der Spinor $\kappa_{1,A}$ immer mehr einem reinen Spinor 1. Stufe, der die Zerlegung eines lichtartigen Vektors darstellt, an. Was sich gegenüber (3.3) geändert hat, ist die Interpretation der Zerlegung in Spinoren 1. Ordnung: Dort wurde der Spinor 2. Stufe $K_{\dot{A}B}$ diagonalisiert und in seiner Eigenbasis dargestellt, während in (3.9) ff. der zeitartige Impulsvektor selbst durch eine Summe lichtartiger Vektoren dargestellt wurde, welche dann in spinorielle Form überführt wurden. Diese Sichtweise wird in Abschnitt 4.3 noch einmal aufgegriffen.

Will man eine Entwicklung nach der Masse durchführen, so hat man in führender Ordnung nur den Spinor $n_{1,A}$ mit dem Vorfaktor $\sqrt{2k^0}$ mitzunehmen. Die als Eigenwerte der Eigenspinoren auftretenden Wurzeln hat man konsistent in der kleinen Größe $\frac{m^2}{k_0^2}$ zu entwickeln:

$$\begin{aligned}\sqrt{k_0+|\vec{k}|} &= \sqrt{k_0+\sqrt{k_0^2-m^2}} \\ &= \sqrt{2k_0}\left(1-\frac{m^2}{8k_0^2}-\frac{5m^4}{128k_0^4}+\mathcal{O}(\frac{m^6}{k_0^6})\right)\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{k_0-|\vec{k}|} &= \sqrt{k_0-\sqrt{k_0^2-m^2}} \\ &= \frac{m}{\sqrt{2k_0}}\left(1+\frac{m^2}{8k_0^2}+\frac{7m^4}{128k_0^4}+\mathcal{O}(\frac{m^6}{k_0^6})\right)\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2 Projektion der Massenschale auf den Lichtkegel

Im letzten Abschnitt wäre prinzipiell auch eine andere Entwicklung denkbar, nämlich nach dem Verhältnis des Massenquadrates zum Betragsquadrat des räumlichen Impulses. Diese Entwicklung, die, wie unten erläutert wird, einem anderen Projektionsschema des zeitartigen Vektors vom Massenschalenhyperboloid auf den Lichtkegel entspricht, erweist sich allerdings für die Implementierung der Spinorprodukte, die für die Massennäherung benötigt werden, als weniger geeignet. Im folgenden Kapitel wird sich zeigen, daß bei

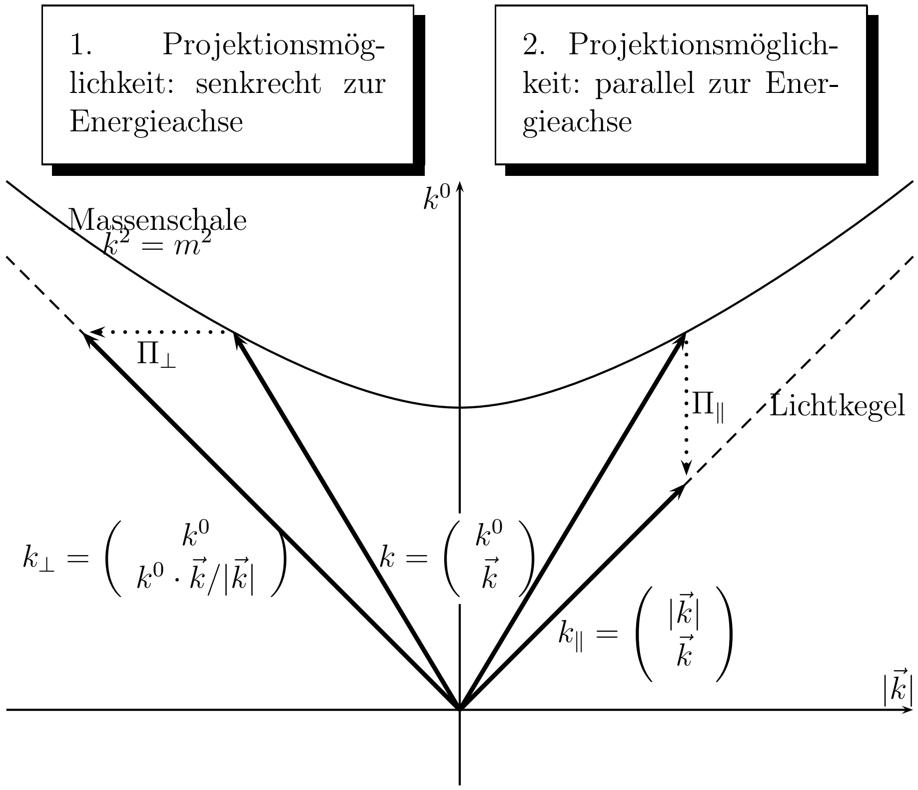


Abbildung 3.3: Im Text geschilderte Projektionsmöglichkeiten von der Massenschale auf den Lichtkegel, der besseren Darstellbarkeit wegen leicht verzerrt und in einem Bereich gezeigt, wo Lichtkegel und Massenschale noch weiter voneinander entfernt sind.

Verwendung des ersten Entwicklungsschemas, verbunden mit der unten geschilderten Projektion auf den Lichtkegel senkrecht zur Energieachse, eine einfache Konstruktion der sogenannten Spinoren 2. Art möglich ist. Letztere sind die Elemente der Diracschen Bispinoren, die im masselosen Grenzfall wegfallen und in der Näherung sich als linear in der Masse erweisen.

Abbildung 3.3 zeigt die beiden ausgezeichnten Projektionsmöglichkeiten, parallel zur Zeit- bzw. Energie-Achse sowie parallel zur „Gleichzeitigkeitsebene“ $k^0 = 0$. Die Entwicklung in der Größe $\frac{m^2}{k_0^2}$ entspricht dabei einer Projektion senkrecht zur Energie-Achse, d.h. die Energie bleibt konstant, während die zweite Möglichkeit einer Projektion parallel zur Energieachse der Entwicklung mit dem Entwicklungsparameter $\frac{m^2}{|\vec{k}|^2}$ äquivalent ist. Alle weiteren prinzipiell durchführbaren Projektionen auf den Lichtkegel verändern sowohl Energie als auch räumliche Impulskomponenten und scheiden daher wegen geringer Praktikabilität von vornherein aus. In diesem Fall würde der zusätz-

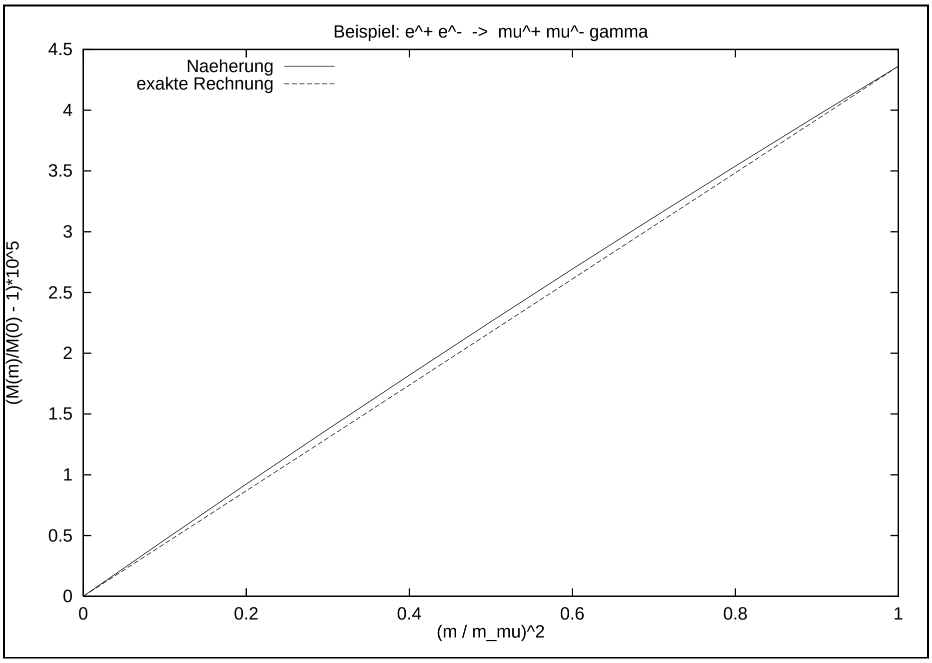


Abbildung 3.4: Korrekturen der Berends-Giele-Amplitude des Prozesses $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$ durch die Myonenmasse, wenn diese linear von Null auf ihren eigentlichen Wert m_μ hochgefahren wird. Näherungsformalismus bis einschließlich 2. Ordnung (+) sowie voll massive Amplitude ($\times$). Auf der Ordinate relative Abweichungen in Vielfachen von 10^{-5}.

liche analytische Aufwand jedwede Vereinfachungen aufgrund der Massenentwicklung kompensieren.

Ein Vergleich der Beträge der Amplituden für den Prozeß $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$, der in Kapitel 6.1 berechnet wird, zeigt, wie die Massenkorrekturen das Ergebnis, welches mittels des masselosen Berends-Giele-Formalismus bestimmt wurde, verändern. Auf der Ordinate sind die relativen Abweichungen der bis zur 2. Ordnung genäherten bzw. der exakten Amplitude von der masselosen in Vielfachen von 10^{-5} angegeben. Die Abszisse stellt das „Einschalten" der Masse dar, d.h. die Impulskonfiguration des Prozesses wurde auf die oben dargelegte Weise unter Beibehaltung der Energien der Teilchen vom Lichtkegel auf das Massenschalenhyperboloid der Myonen transferiert. Bedenkt man, daß die Projektion auf die Massenschale linear in der Größe $|\vec{k}|/k^0$ stattgefunden hat und entwickelt dies in eine Potenzreihe in m^2/k_0^2 wie in (3.10) und (3.11), dann sieht man damit die Linearität der Projektion in m^2. Deutlich ist in der Graphik zu erkennen, daß die Korrekturen durch das Berücksichtigen der Myonenmasse linear mit der Projektion wachsen.

Kapitel 4

Allgemeine Massenkorrekturen in der QED

4.1 Spinoren 1. und 2. Art

Die Grundidee, Matrixelemente der Quantenelektrodynamik (QED) mit Massenkorrekturen führender, d.h. maximal quadratischer Ordnung zu versehen, ist der, daß man nicht die gesamte Amplitude betrachtet, sondern sich entlang der einzelnen Fermionenlinien hangelt (s. Kapitel 2) und dort Vertex für Vertex die Massenkorrekturen anbringt. Die Feynman-Regeln für die WvdW-Spinoren finden sich im Anhang; herleiten kann man sie, indem man in die Lagrangedichte des Standardmodells die Spinorausdrücke einsetzt und dann auf die übliche Weise die Feynman-Regeln daraus abliest. Ein einfacherer Weg, wie man von den „herkömmlichen" Feynman-Regeln zu den „spinoriellen" gelangt, kann in [1] nachgeschlagen werden. Wichtig vor allem für die Fermionenlinien ist die Gestalt der vierdimensionalen Einheitsmatrix und der Größe $\not{p}$, die sich mit den Formeln aus Anhang A so darstellen lassen:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \delta_A^B & 0 \\ 0 & \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \qquad \not{p} = \begin{pmatrix} 0 & P_{A\dot{B}} \\ P^{\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Anhand der Entwicklungen (3.11) und (3.12) liest man ab, daß durch die Zustände der äußeren Fermionen Massenterme durch die Spinorkomponenten der Dirac-Spinoren Eingang in die Amplitude finden. Man kann die Entwicklung folgendermaßen organisieren, indem man den Spinor n_1 (s. (3.2)) mit dem Vorfaktor $\sqrt{2k^0}$ als Spinor „1. Art" bezeichnet, während n_2, diesmal aber mit dem expliziten Vorfaktor $1/\sqrt{2k^0}$ versehen, als Spinor „2. Art" definiert. Dies geschieht in Anlehnung an die Entwicklungen der Wurzeln in (3.10) und (3.11), um Anschluß an die Spinordefinitionen von Berends-Giele zu gewinnen (s. Anhang C) sowie um eine möglichst einfache Implementierung der Spinorprodukte in numerischen Rechnungen zu gewährleisten.

Die Spinoren 1. und 2. Art, die sich dabei aus der Entwicklung der Masseterme ergeben, haben dann die folgende Gestalt:

$$k_A = \sqrt{2k_0} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \tilde{k}_A = \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Wie man erkennt, hat der Spinor 1. Art die Dimension (Energie)$^{\frac{1}{2}}$, während der 2. Art die Dimension (Energie)$^{-\frac{1}{2}}$ aufweist. Natürlich ist diese Wahl nur eine mögliche, durch eine unitäre Transformation kann man zu einer anderen übergehen. Für numerische Berechnungen ist es günstiger, die Winkel direkt durch die Komponenten der jeweiligen Impulse auszudrücken (s. auch Anhang C):

$$k_A = \begin{pmatrix} (k_1 - ik_2)/\sqrt{k_0 - k_3} \\ \sqrt{k_0 - k_3} \end{pmatrix} \qquad \tilde{k}_A = \frac{1}{2k_0} \begin{pmatrix} \sqrt{k_0 - k_3} \\ -(k_1 + ik_2)/\sqrt{k_0 - k_3} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Hier hat man bis auf eine Phase denselben Ausdruck wie in ([2], Gl. 2.16). Die Komponenten $k_i, i = 1, 2, 3$ gehören hierbei natürlich zu masselosen Vektoren, denn wie im vorangehenden Kapitel diskutiert, hat man ja eine Projektion der Impulsvektoren vom Massenschalen-Hyperboloid auf den Lichtkegel zu bewerkstelligen, bei welcher die räumlichen Komponenten angepaßt werden, um die Lichtartigkeit zu erreichen. An dieser Stelle sollte nun noch beachtet werden, daß man die räumlichen Koordinaten drehen sollte, um nicht numerische Schwierigkeiten heraufzubeschwören: Bei Verwendung von einlaufenden masselosen Teilchen, die sich gerade in positiver bzw. negativer z-Richtung bewegen, teilte man sonst durch Null. (Da für eine Vielzahl der Anwendungen Elektronen und Positronen als Ausgangsstrahlen herhalten müssen, die man auch innerhalb der bereits angesprochenen Genauigkeitsgrenzen noch als masselos annehmen kann, ist in der Tat Vorsicht geboten!) In allen Spinoren in den Amplituden werden die räumlichen Impulskomponenten zyklisch vertauscht, $k^1 \to k^2 \to k^3 \to k^1$, was einer $120°-$Drehung um die Achse $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ entspricht. Insgesamt verändert diese rein räumliche Rotation die Amplitude nur um eine universelle, im weiteren bedeutungslose Phase (s. hierzu ebenfalls wieder [2]). Die für numerische Rechnungen benutzten Spinoren haben demnach diese Gestalt:

$$k_A = \begin{pmatrix} (k_2 - ik_3)/\sqrt{k_0 - k_1} \\ \sqrt{k_0 - k_1} \end{pmatrix} \qquad \tilde{k}_A = \frac{1}{2k_0} \begin{pmatrix} \sqrt{k_0 - k_1} \\ -(k_2 + ik_3)/\sqrt{k_0 - k_1} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

4.2 Formale Entwicklung massengenäherter Amplituden in der QED

Zur Herleitung des Ausdruckes für die Fermionenlinie (unabhängig von deren Bedeutung als Fermionenlinie, Antifermionenlinie, Paarvernichtungs- oder Paarerzeugungs-Linie) benötigt man die Gestalt der Kombination Propagator/Vertex, die man leicht mittels der Feynman-Regeln (s. Anhang A und B) erhält (es wird nur die Matrixstruktur betrachtet, die Vorfaktoren von Propagator und Vertex werden hier unterdrückt):

$$\begin{pmatrix} m_f \delta^{A_i}_{B_{i-1}} & P_{B_{i-1}\dot{A}_i} \\ P^{\dot{B}_{i-1}A_i} & m_f \delta^{\dot{B}_{i-1}}_{\dot{A}_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{C}_i}_{\dot{B}_i}\delta^{D_i}_{A_i} \\ \epsilon^{\dot{A}_i\dot{C}_i}\epsilon^{B_iD_i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -P^{\dot{C}_i}_{B_{i-1}}\epsilon^{B_iD_i} & m_f \delta^{D_i}_{B_{i-1}}\delta^{\dot{C}_i}_{\dot{B}_i} \\ m_f \epsilon^{\dot{B}_{i-1}\dot{C}_i}\epsilon^{B_iD_i} & P^{\dot{B}_{i-1}D_i}\delta^{\dot{C}_i}_{\dot{B}_i} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Im masselosen (BG-) Fall wird diese Kombination Propagator/Vertex zu einer Diagonalmatrix,

$$\begin{pmatrix} -P^{\dot{C}_i}_{B_{i-1}}\epsilon^{B_iD_i} & 0 \\ 0 & P^{\dot{B}_{i-1}D_i}\delta^{\dot{C}_i}_{\dot{B}_i} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Setzt man (4.5) bzw. (4.6) in $(n-1)$-facher Zahl aneinander, erkennt man das Schema, wie man die Einträge in der 2×2-Matrix, die die gesamte Fermionenlinie repräsentiert, nach Potenzen der Masse ordnen kann. Die Details der Rechnung sind nicht sonderlich erhellend, sondern eher eine Übung im Kontrahieren von Spinorindizes und daher hier nicht wiedergegeben. Man kann sich allerdings auch von einer graphischen Umsetzung dieser Regeln leiten lassen, wie sie in Anhang C beschrieben wird, um sich die Struktur der allgemeinen Fermionenlinie zu veranschaulichen. Die jeweiligen Massenpotenzen entstehen (man beachte, daß aufgrund der speziellen Gestalt der Kombination Propagator/Vertex die Einträge der gesamten Matrix einer Fermionenlinie entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen der Fermionenmasse enthalten), indem man stets eine gerade Zahl von „masselosen“ Propagatoren, d.h. solchen, bei denen die Massen der Fermionen identisch Null gesetzt wurden, durch einen Einschub in Form der mit der Fermionenmasse multiplizierten Einheitsmatrix ersetzt. Dadurch gelangt man schließlich zu den Formeln (2.1) – (2.3) in Kapitel 2. Jetzt hat man auch den Spezialfall der BG-Amplituden in der Hand, also Amplituden, bei denen die Massen aller vorkommenden Fermionen identisch Null gesetzt werden. Da die Diagonalterme in (2.1) bzw. (2.24) proportional zur Masse sind, treten diese nicht auf, und die querdiagonalen Terme vereinfachen sich, da nur der führende Summand in (2.3) beiträgt. Die masselose Fermionenlinie hat demnach diese querdiagonale Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta_{\dot{B}_n}^{\dot{C}_n} \delta_{A_1}^{D_1} \mathbf{B}(n) \\ \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \epsilon^{B_n D_n} \mathbf{C}(n) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Dagegen erhält man für den Term 1. Ordnung in den Massenkorrekturen (vergl. wiederum die allgemeinen Terme in Kapitel 2 und bzgl. der Nomenklatur die Abbildung 2.1):

$$\begin{pmatrix} m_f \epsilon^{B_n D_n} \delta_{A_1}^{D_1} \mathbf{A}(n) & \delta_{\dot{B}_n}^{\dot{C}_n} \delta_{A_1}^{D_1} (\mathbf{B}'(n) + m_f^2 \mathbf{E}(n)) \\ \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \epsilon^{B_n D_n} (\mathbf{C}'(n) + m_f^2 \mathbf{F}(n)) & m_f \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \delta_{\dot{B}_n}^{\dot{C}_n} \mathbf{D}(n) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Ein explizites Beispiel anhand eines QED-Prozesses mit sechs Vertizes und fünf Propagatoren zur Verdeutlichung dieser Entwicklung und der folgenden Konventionen ist im Anhang F angegeben. Für die Terme in der Entwicklung (4.8) ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\mathbf{A}(n) = \sum_{l=2}^{n} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq l}}^{n} \left(P - \sum_{r=i}^{n} k_r \right)^{D_{i-1/i} \dot{C}_{i/i-1}} \epsilon^{\dot{C}_{l-1} \dot{C}_l} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{B}(n) = \prod_{i=2}^{n} \left(P - \sum_{j=i}^{n} k_j \right)^{D_i \dot{C}_{i-1}} , \quad \mathbf{B}'(n) = \prod_{i=2}^{n} \left(\hat{P} - \sum_{j=i}^{n} k_j \right)^{D_i \dot{C}_{i-1}} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{C}(n) = \prod_{i=2}^{n} \left(P - \sum_{j=i}^{n} k_j \right)^{D_{i-1} \dot{C}_i} , \quad \mathbf{C}'(n) = \prod_{i=2}^{n} \left(\hat{P} - \sum_{j=i}^{n} k_j \right)^{D_{i-1} \dot{C}_i} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{D}(n) = \sum_{l=2}^{n} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq l}}^{n} \left(P - \sum_{r=i}^{n} k_r \right)^{D_{i/i-1} \dot{C}_{i-1/i}} \epsilon^{D_l D_{l-1}} \tag{4.12}$$

$$\mathbf{E}(n) = \sum_{\substack{l,r=1 \\ l<r}}^{n} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq l,r}}^{n} \left(P - \sum_{b=i}^{n} k_b \right)^{D_{i-1/i} \dot{C}_{i-1/i}} \epsilon^{\dot{C}_X \dot{C}_{X+1}} \epsilon^{D_Y D_{Y-1}} \tag{4.13}$$

$$\mathbf{F}(n) = \sum_{\substack{l=2 \\ l<r}}^{n} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq l,r}}^{n} \left(P - \sum_{b=i}^{n} k_b \right)^{D_{i/i-1} \dot{C}_{i-1/i}} \epsilon^{\dot{C}_X \dot{C}_{X+1}} \epsilon^{D_Y D_{Y-1}} \tag{4.14}$$

Hierbei wurde in den „gestrichenen“ Termen die Abkürzung

$$\hat{P}_{\dot{A}B} = p_{\dot{A}} p_B \left(1 - \frac{m_f^2}{4p_0^2}\right) + m_f^2 \tilde{p}_{\dot{A}} \tilde{p}_B \tag{4.15}$$

verwendet, die dadurch zustande kommt, daß man für bestimmte Konstellationen der äußeren fermionischen Zustände, abhängig davon, ob die betrachtete durchlaufende Linie eine Fermionenlinie, eine Antifermionenlinie ist bzw. zu einem Paarerzeugungs- oder Paarvernichtungsprozeß gehört, diese $\mathcal{O}(m_f^2)-$Terme noch berücksichtigen muß. Dies kann auf die folgende Weise geschehen: Jedes der Matrixelemente in (4.8) wird mit zwei WvdW-Spinoren von den äußeren fermionischen Zuständen kontrahiert, die selbst (s. Kapitel 3 und Abschnitt 4.1) als Potenzreihen in der Masse anzusehen sind. Man erinnere sich daran, daß die Spinoren 1. Art als führenden Term $\mathcal{O}(1)$ aufweisen, während die Spinoren 2. Art mindestens linear in der Masse sind. Wird das jeweilige Element von (4.8) nun mit zwei Spinoren 1. Art kontrahiert, hat man die höheren Massenterme in den Elementen von (4.8) noch mitzunehmen, bei Kontraktion mit einem oder gar zwei Spinoren 2. Art fallen diese weg; dann brauchen auch die beiden Summen $\mathbf{E}(n)$ bzw. $\mathbf{F}(n)$ nicht berücksichtigt zu werden. Eine Auflistung dieser Fälle findet sich in Anhang E.

Die Struktur von $\mathbf{B}(n)$ und $\mathbf{C}(n)$ bzw. von $\mathbf{B}'(n)$ und $\mathbf{C}'(n)$ ist direkt ersichtlich. Die Indizes r, l in den beiden Beiträgen, die immer quadratisch in der Massenpotenz sind, also $\mathbf{E}(n)$ und $\mathbf{F}(n)$, laufen dabei über alle möglichen Werte zwischen 2 und n. Die Summe in $\mathbf{E}(n)$ erstreckt sich über alle Kombinationen der $(n-3)$ Impulsterme aus den Zählern der Propagatoren (zwei sind jeweils durch Fermionen-Massen ersetzt) $(P - \sum_{j=i}^n k_j)^{D_j \dot{C}_{j-1}}$, wobei allerdings bei *allen* Impulstermen zwischen den beiden herausgenommenen die Subskripte von $\dot{C}$ und D auszutauschen sind. In den Formeln für $\mathbf{E}(n)$ und $\mathbf{F}(n)$ tragen die Epsilon-Tensoren zunächst unspezifizierte Indizes X und Y; diese sind nach der Vergabe der Indizes $\dot{C}_i$ und D_j an die Impulse $(P - k)$ nach den oben dargelegten Regeln als diejenigen zu wählen, die bei dieser Prozedur übriggeblieben sind. (Man bedenke, daß die jeweiligen Einträge der Matrix (4.8) eine bestimmte Spinorstruktur tragen, die deren Transformationsverhalten festlegt, welches von der Massenentwicklung respektiert werden muß.) Dabei ist auf die „kanonische“ Reihenfolge der Indizes zu achten, d.h. bei den gepunkteten C's: $X - 1 \to X$ befindet sich der kleinere links, bei den ungepunkteten D's: $Y \to Y - 1$ steht der kleinere Index rechts. Es gilt für $\mathbf{E}(n)$ immer $X < Y$. Bei $\mathbf{F}(n)$ sind alle Summen der Kombinationen der $(n-3)$ Impulsterme $(P - \sum_{j=i}^n k_j)^{D_{j-1} \dot{C}_j}$ (Indexreihenfolge!) zu bilden; wiederum wechseln alle Subskripte der C's und D's an den Impulstermen zwischen den beiden fehlenden ihre Plätze. Auch in bezug auf die Epsilontensoren tritt eine Änderung gegenüber $\mathbf{E}(n)$ auf, jetzt hat man $Y < X$.

Die Regeln zur Bildung von $\mathbf{A}(n)$ und $\mathbf{D}(n)$ sind ähnlich: $\mathbf{A}(n)$ ist die Summe über alle Kombinationen der $(n-2)$ Impulsterme $(P-\sum_{j=i}^{n} k_i)^{D_i \dot{C}_{i-1}}$ vor dem ausgelassenen Impulsterm und verdrehter Indexfolge bei den Termen nach dem fehlenden. Ist l der Index dieses Impulses, hat der eine auftretende Epsilontensor die Form $\epsilon^{\dot{C}_{l-1}\dot{C}_l}$. Im Falle von $\mathbf{D}(n)$ sind alle Impulsterm-Kombinationen $(P-\sum_{j=i}^{n} k_i)^{D_{i-1}\dot{C}_i}$ (Indexreihenfolge!) aufzusummieren, mit der angegebenen Indexfolge bei den Termen vor dem fehlenden, invertierter bei denen danach. Trägt der durch einen Massenterm ersetzte Impuls den Index l, taucht hier der Epsilontensor $\epsilon^{D_l D_{l-1}}$ auf.

Aus (4.9) – (4.14) kann man sofort auf die Eigenschaften der eben eingeführten Größen schließen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(n) &= -\left(\mathbf{D}(n)^{\{C\leftrightarrow D\}}\right)^* \\
\mathbf{B}^{(\prime)}(n) &= \left(\mathbf{C}^{(\prime)}(n)^{\{C\leftrightarrow D\}}\right)^* \\
\mathbf{E}(n) &= \left(\mathbf{F}(n)^{\{C\leftrightarrow D\}}\right)^*
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Diese Relationen stellen einen Spezialfall von (2.4) dar und vermindern erneut, wie schon im allgemeinen Fall in Kapitel 2, den Rechenaufwand.

Bei der Berechnung der Amplituden kann man die Minkowski-Vektorprodukte ungenähert verwenden, da dann unphysikalische Pole, wie in vorangehenden Kapiteln und in [1] beschrieben, vermieden werden. Als wesentliche Konsequenz bleiben die in dem Faktor $\mathcal{P}(n)$ zusammengefaßten Nenner der Fermionenpropagatoren der Gestalt

$$\prod \frac{1}{p_f^2 - m_f^2}$$

ungenähert. Dadurch werden Singularitäten durch kollineare Photonenabstrahlung vermieden, die numerische Schwierigkeiten bei Phasenraum-Integrationen verursachen. Im Rahmen der Entwicklung der Helizitätsamplituden nach Potenzen der Fermionenmassen kann man das Einsetzen der exakten Propagatornenner so deuten, daß eine bestimmte Klasse von Entwicklungstermen, eben jene der aus der Näherung dieser Nenner resultierenden, in allen Ordnungen aufsummiert und in einem kompakten Ausdruck notiert wird. Die Amplitude faktorisiert in einen Teil, der die Information über die Dynamik der Helizitäten an den Vertizes, formuliert mittels WvdW-Spinoren, enthält, dessen Entwicklung nach der quadratischen Ordnung abgebrochen wird, sowie einen Teil, der die freie Propagation der Fermionen mittels Vektorprodukten beschreibt, der in allen Ordnungen der Massenentwicklung betrachtet wird. Minkowski-Vektorprodukte treten allerdings nicht nur in den Propagatornennern auf, sie kommen auch durch die Normierungen der Polarisationsspinoren von Vektorbosonen (s. Abschnitt 4.4) zustande. Zudem können in den Zählern Vektorprodukte entstehen (durch entsprechende Kombination von Spinorprodukten), die sich nicht gegen gleiche Vektorprodukte im Nenner wegheben. Hier kann man den exakten Ausdruck, den der Dittmaier'sche Formalismus liefert, stehenlassen, um die Zahl der numerisch auszuwertenden Terme zu verringern; der Fehler, der dabei entsteht, ist nur von der Größenordnung $\mathcal{O}(m_f^4)$.

4.3 Massenkorrekturregeln und Anwendungen

Um nun eine Amplitude in führender Ordnung der Massenentwicklung, genauer gesagt bis einschließlich Termen der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^2)$ zu bekommen, muß die die Propagatoren und Vertizes darstellende Matrix (4.8) noch mit den äußeren Helizitätszuständen kontrahiert werden. Verwendet man dabei die Nomenklatur aus Abschnitt 2.1, erhält man für alle denkbaren Prozesse die zugehörigen Amplituden. Man kann dabei unterscheiden, je nachdem, ob die betrachtete Linie eine Fermionen- oder Antifermionenlinie ist bzw. einen Paarerzeugungs- oder Paarvernichtungsprozeß darstellt. Die Amplituden zu den jeweiligen Prozessen finden sich in Anhang D; das relative Vorzeichen $(-1)^{n-1}$ bei der Antifermionenlinie rührt daher, daß alle Pfeile der inneren Propagatorlinien umgedreht sind. Weitere Unterschiede zwischen den einzelnen Prozessen kommen durch die Konvention zustande, daß dem Fermion stets der Impuls p, dem Antifermion der Impuls p' zugeordnet wurde, aber die Impulse der Propagatornenner mittels der Impulserhaltung immer durch den Fermionenimpuls p ausgedrückt wurden. Vergleicht man die Formeln in Anhang D mit solchen, die nach dem Formalismus von Berends-Giele gerechnet sind, also komplett masselos, erkennt man noch einmal den Fakt, daß man gegenüber diesem eine für jede in einem Prozeß auftretende Fermionenlinie vierfache Anzahl von fundamentalen Termen hat; die hinzugekommenen Terme kann man auf die folgende Weise deuten: Man berechnet den BG-Prozeß bei Ersetzung von $P_{\dot{A}B}$ durch $\hat{P}_{\dot{A}B}$, addiert dazu alle Terme, bei denen je zwei der Propagatoren durch m_f^2 sowie zwei Spinormetriken ersetzt sind. Die anderen drei fundamentalen Terme ergeben sich, indem jeweils einer der beiden Fermionenzustände (Anfangs- oder Endzustand) durch den „paritätskonjugierten“ Zustand ersetzt wird. Dies meint allerdings nicht, daß die Helizität des Teilchens geändert wird, sondern lediglich die Winkelabhängigkeit der Spinorkomponenten wird gespiegelt. Umgedeutet stellt sich die Situation also folgendermaßen dar, daß die Aufspaltung des Prozesses in insgesamt vier Terme als vier verschiedene Prozesse angesehen werden kann, wobei der Prozeß mit beiden „paritätsgespiegelten“ Zuständen die relative Phase $\exp[-2\mathrm{i}(\phi \mathrm{sgn}\sigma + \phi' \mathrm{sgn}\sigma')] \cdot \mathrm{sgn}(\prod_i \sigma_i)$, $\sigma_i =$ Helizitäten der ein- und auslaufenden Fermionen, erhält. Weiterhin muß dieser Teil der Amplitude durch den Faktor $(2p^0)(2p^{0\prime})$ dividiert werden. Der Prozeß Ausgangsteilchen $\rightarrow$ „paritätstransformierter" Endzustand bekommt die relative Phase $\exp[-2\mathrm{i}\phi'\mathrm{sgn}\sigma'] \cdot \mathrm{sgn}(\prod_i \sigma_i)$, Nomenklatur wie eben, die Amplitude wird mit dem Faktor $m_f^2/(2p^{0\prime})$ versehen, während die verbleibende Amplitude „paritätskonjugierter" Ausgangszustand $\rightarrow$ Endzustand mit der Phase $\exp[-2\mathrm{i}\phi\mathrm{sgn}\sigma] \cdot \mathrm{sgn}(\prod_i \sigma_i)$ sowie dem Faktor $m_f^2/(2p^0)$ versehen ist. In den letztgenannten Prozessen ist jeweils ein Impulsterm durch eine Spinormetrik ersetzt. Die gestrichenen Größen sind hier stets diejenigen des in bezug auf die Richtung der Fermionenlinie auslaufenden Teilchens, die ungestrichenen die des in diesem Sinne einlaufenden Teilchens. Ob dies nun Fermionen oder Antifermionen, auslaufend/einlaufend oder beide ein- oder auslaufend sind, hängt von der Art des Prozesses ab. Wenn auch diese so produzierten Regeln bei der expliziten Berechnung von massengenäherten Amplituden von keinem großen Nutzen sind, liefern sie doch eine gewisse Anschauung, wie man sich die Amplituden von Prozessen massiver Teilchen in führender Ordnung durch die Amplituden bestimmter Kombinationen von Prozessen masseloser Teilchen linearkombiniert vorstellen kann.

4.4 Eichspinoren in der Massennäherung

Zur Klärung steht nun noch die Frage der Eichspinoren in dem Formalismus der Massennäherungen aus. Hier könnte man zunächst der Meinung sein, die gleiche Eichspinorwahl zu treffen wie Berends/Giele in deren Rechnungen [2]. Dann sähe man sich jedoch genau der Schwierigkeit wieder gegenüber, der man gerade aus dem Weg gehen wollte: Dem Auftreten von Singularitäten im kollinearen Falle der Fermionen und abgestrahlter Photonen, was ja bereits angesprochen wurde. Deswegen findet hier dieselbe Form der Eichspinoren Anwendung wie bei Dittmaier, d.h. im massiven Fall, also der Impulsspinor des Photons in Kontraktion mit dem vollen massiven Impulsspinor (2. Stufe) des Fermions (vgl. (2.10)). Dabei ist natürlich darauf zu achten, daß, um konsistent zu bleiben, alle Terme höherer als quadratischer Ordnung in der Masse zu vernachlässigen sind. Setzt man die Massennäherung in den Eichspinor und diesen dann in den Polarisationsspinor für die äußeren Photonenzustände ein, dann bekommt man einen Ausdruck, den man in den Massennäherungen verwenden kann, beispielsweise für ein auslaufendes Photon positiver Helizität:

$$\varepsilon^*_{+,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2}}{2(p\cdot k)} \left\{ k_{\dot{A}}\kappa_B \langle \kappa k\rangle^* \cdot \left(1 - \frac{m_f^2}{4p_0^2}\right) + k_{\dot{A}}\tilde{\kappa}_B \langle \tilde{\kappa} k\rangle^* \cdot m_f^2 \right\} + \mathcal{O}(m_f^4) \tag{4.17}$$

Es mag ungewöhnlich erscheinen, daß gerade durch die Polarisationsspinoren äußerer Photonen Fermionenmassen in die Entwicklung der Amplituden mit hereinkommen, man muß sich aber daran erinnern, daß der Eichspinor die kinematische Information anderer Diagrammteile übernimmt, wenn diese durch die bestimmte Wahl des Eichspinors wegfallen. In diesem Fall hat man dann einen Teil der Fermionenmassenkorrekturen der Amplitude auch in den Eichspinoren der Photonen verborgen. Der entscheidende Punkt ist das Zusammenbauen der Spinorprodukte im Nenner (durch die Normierung des Polarisationsspinors einerseits und die Spinorprodukte, die der Eichspinor bei der Wahl wie in (2.10) bereits enthält) zu dem Minkowski-Vektorprodukt $2(p\cdot k)$. Dieses wird nach dem in Abschnitt 4.2 Gesagten ungenähert stehengelassen. Die Fehler, die bei einem eventuellen Kürzen solcher Vektorprodukte im Nenner gegen entsprechende Kombinationen von Spinorprodukten im Zähler entstehen, sind dann von der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^4)$, so daß ein solches Kürzen durchaus gerechtfertigt erscheint. An dieser Stelle ist wesentlich zu beachten, welcher Ordnung in der Massenentwicklung die betreffenden Terme im Zähler sind. Sind diese bereits von quadratischer Ordnung, darf man bedenkenlos $2(p\cdot k)$ gegen die beiden Spinorprodukte $\langle pk\rangle^* \langle pk\rangle$ kürzen, da diese beiden Ausdrücke in der führenden Ordnung miteinander übereinstimmen. Hat man allerdings Spinorprodukte im Zähler in $\mathcal{O}(1)$-Termen vorliegen, dann darf man das Vektorprodukt $2(p\cdot k)$ nur gegen die Summe der beiden Terme $\langle pk\rangle^* \langle pk\rangle \cdot \left(1 - \frac{m_f^2}{4p_0^2}\right) + m_f^2 \langle \tilde{p}k\rangle^* \langle \tilde{p}k\rangle$ kürzen. Dies ist ein empfindlicher Punkt der Massennäherung, da man durch Weglassen von Termen in quadratischer Ordnung durch „nicht sachgemäßes“ Kürzen die Eichinvarianz der Amplitude zerstört, was in jedem Fall ein Sakrileg ist, da die Berechnung eines nicht eichinvarianten Ausdruckes Resultate produziert, die von unphysikalischen Parametern abhängen und daher irrelevant sind.

Eine Eichtransformation ergibt einen anderen Polarisationsspinor für das Photon, welcher sich vom ursprünglichen um einen Term proportional zu $k_{\dot{A}}k_B$ unterscheidet; hat man nun inkonsistent gekürzt, dann hat die Kontraktion dieses Zusatztermes mit der Amplitude aber nicht deren Verschwinden zur Folge, da entweder Terme $\mathcal{O}(m_f^2)$ fehlen oder überflüssig sind: Die Eichinvarianz ist nicht mehr gegeben. Deshalb ist vor allem bei den Kontraktionen der Amplituden mit den Polarisationsspinoren masseloser Vektorbosonen (das gleiche Problem stellte sich auch für Gravitonen) Vorsicht geboten.

Kapitel 5

Lorentz-Invarianz massengenäherter Amplituden

Nachdem in den vorangehenden Kapiteln diskrete Symmetrien des Standardmodells sowie Eichsymmetrien behandelt wurden, ist noch die Frage nach dem Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen offen. In Abschnitt 4.1 wurde bereits erwähnt, daß eine Drehung der räumlichen Achsen den Amplituden lediglich eine universelle Phase verleiht. Dies läßt sich damit erklären, daß nur die Spinoren geändert werden (die in der Massennäherung auftretenden Energien hängen nicht von der räumlichen Orientierung der Impulse ab) und damit die Spinorprodukte insgesamt eine Phasenänderung erfahren. Unter Boosts sind die Helizitätsamplituden massiver Fermionen (und Vektorbosonen) natürlich nicht invariant, da man für massive Teilchen stets ein Inertialsystem finden kann, in dem (bei gleichem Spin) die Richtung des Impulses invertiert ist. Dadurch hat man dann gerade die andere Helizität des massiven Teilchens, die Amplituden solcher Prozesse müssen sich mit dem gewählten Lorentz-System ändern. Summiert man aber über die Helizitätsmöglichkeiten der vorkommenden äußeren massiven Teilchen, dann erhält man eine Lorentz-Invariante (äußere Photonen, Gluonen und Neutrinos unter der Annahme verschwindender Masse können dabei in einem definierten Helizitätszustand verbleiben).

In den folgenden Überlegungen finden wieder die Konventionen aus Abschnitt 4.1 bezüglich der Spinoren 1. und 2. Art Anwendung. Die mit Zahlen als Suffix versehenen Spinoren sind dabei die der Zerlegung des auf der Massenschale liegenden Impulsvektors p^μ entsprechenden Eigenspinoren, hier mit κ bezeichnet (die „Einheitsspinoren" $n_{i,A}$ finden sich unter (3.2)):

$$\kappa_{1,A} = \sqrt{p^0 + |\vec{p}|}\, n_{1,A}, \qquad \kappa_{2,A} = \sqrt{p^0 - |\vec{p}|}\, n_{2,A}. \tag{5.1}$$

Demgegenüber sind die massengenäherten Spinoren durch die (mit oder ohne

Tilde) versehenen κ-Spinoren ohne Numerierung gegeben:

$$\kappa_A = \sqrt{2p^0}\, n_{1,A}, \qquad \tilde{\kappa}_A = \frac{1}{\sqrt{2p^0}}\, n_{2,A}. \tag{5.2}$$

Minkowski-Skalarprodukte sind neben Konstanten die fundamentalen Invarianten unter Lorentz-Transformationen. Zerlegt man, wie unter (3.1) - (3.5) beschrieben, zwei lichtartige Vierer-Vektoren in ihre Spinorkomponenten:

$$P_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \kappa_{i,\dot{A}}\kappa_{i,B}, \qquad Q_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \rho_{i,\dot{A}}\rho_{i,B}, \tag{5.3}$$

dann kann man, wie bereits an früherer Stelle ausgenutzt, die Minkowski-Skalarprodukte durch die Spinoren ausdrücken:

$$2(p\cdot q) = |\langle\kappa_1\rho_1\rangle|^2 + |\langle\kappa_1\rho_2\rangle|^2 + |\langle\kappa_2\rho_1\rangle|^2 + |\langle\kappa_2\rho_2\rangle|^2 \tag{5.4}$$

Nähert man diesen Ausdruck in der üblichen Weise durch Abbruch der Massenentwicklung nach der zweiten Ordnung, erhält man den folgenden Term:

$$\begin{aligned} 2(p\cdot q) = \quad & |\langle\kappa\rho\rangle|^2 \cdot \left(1 - \frac{m_p^2}{8p_0^2} - \frac{m_q^2}{8q_0^2}\right) \\ & + m_q^2\,|\langle\kappa\tilde{\rho}\rangle|^2 + m_p^2\,|\langle\tilde{\kappa}\rho\rangle|^2 \\ & + \mathcal{O}(m_p^4, m_p^2 m_q^2, m_q^4), \end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei m_q und m_p die Massen der Teilchen mit Viererimpulsen p und q sind. Der Ausdruck (5.3) ist selbstverständlich nicht Lorentz-invariant, da die einzelnen Spinorprodukte für „massive“ Vektoren keine Invarianten sind, und die Schreibweise m_p^2/p_0^2 natürlich explizit die Lorentz-Invarianz bricht. Es ist aber auch klar, daß, wenn man alle Ordnungen der Entwicklung in dieser kleinen Größe mitnimmt, wieder die vollen Wurzeln vor den Spinorprodukten erhält, ebenso wie den fehlenden Term, der von dem Spinorprodukt der beiden Spinoren 2. Art herrührt; es baut sich damit alles wieder zu den kovarianten Größen zusammen. Somit ist in der Massenentwicklung die Lorentz-Invarianz nur gebrochen im Rahmen der Genauigkeit, die durch die Entwicklung der Amplituden bis zur zweiten Ordnung gegeben ist. Durch numerische Rechnungen, indem man die Vektoren der an dem betrachteten Prozeß teilnehmenden Teilchen in ein anderes Bezugssystem boostet, kann man sich davon direkt überzeugen. Im Niederenergiebereich (eine Größenordnung der Schwerpunktsenergie über der größten vorkommenden Masse und darunter) ist die Verletzung der Lorentz-Invarianz dann von der gleichen Ordnung wie die Abweichung des mittels der Näherung ausgerechneten Wertes von dem exakten Ergebnis.

Im Hochenergie-Regime, wo der in den vorangegangenen Kapiteln entwickelte Formalismus der Massennäherungen von Dittmaier'schen Helizitätsamplituden zur Anwendung kommen soll, ist die Lorentz-Invarianz also nur gebrochen auf einer Größenskala der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^4)$; Terme dieser Ordnung werden in der Entwicklung der Amplituden ohnehin vernachlässigt. Man ist daher in der Lage, die Amplitude in jedem gewünschten Bezugssystem, welches ausreichend vom Ruhesystem verschieden ist, auszurechnen, in der gleichen Weise, als handelte es sich um ein echt Lorentz-invariantes Objekt. Allerdings dient die Berechnung der Amplituden bzw. der zugehörigen Wirkungsquerschnitte der theoretischen Beschreibung von Kollider-Experimenten, bei denen das Laborsystem mit dem Schwerpunktsystem zusammenfällt, welches sozusagen als das „natürliche" Bezugssystem der spinoriellen Helizitätsamplituden anzusehen ist, da hierin die jeweiligen Ausdrücke numerisch am einfachsten zu bestimmen sind. Von diesem Standpunkt aus gesehen stimmen das spezielle Bezugssystem der Entwicklung und das Laborsystem überein und das Problem, die jeweiligen Vektoren in anderes System boosten zu müssen, stellt sich (meistens) erst gar nicht. Dennoch ist es beruhigend zu wissen, daß sich etwaige Abweichungen im Rahmen der Massenentwicklung ganz zwanglos erklären lassen.

Kapitel 6

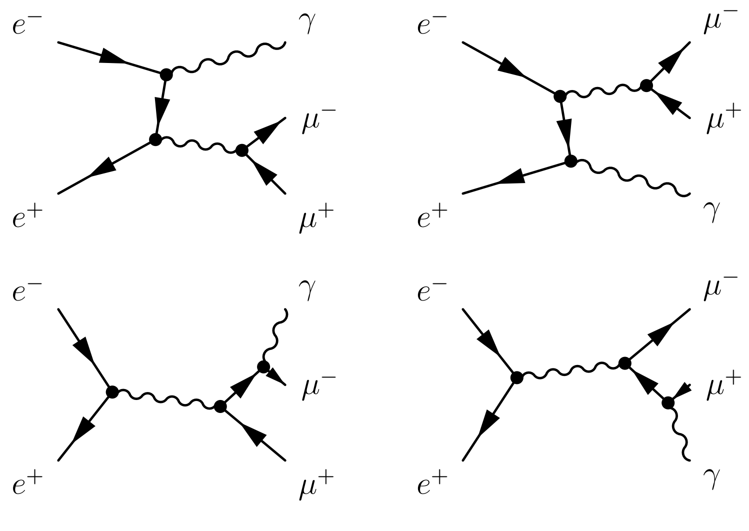
Anwendungen des Formalismus

6.1 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$

Als Test bezüglich der Güte der Näherung und der Eigenschaften der Projektion von der Massenschale auf den Lichtkegel (s. Abschnitt 3.2) dient der Prozeß

$$e^+(p', \sigma') + e^-(p, \sigma) \longrightarrow \mu^+(q', \tau') + \mu^-(q, \tau) + \gamma(k, \lambda), \qquad (6.1)$$

der die Vernichtung eines Elektronenpaares und die Erzeugung eines Myonenpaares bei zusätzlicher Abstrahlung eines Bremsstrahlungsquants beschreibt. Die Amplitude setzt sich aus den Beiträgen von vier verschiedenen Diagrammen zusammen, je nachdem, welches der Fermionen das Gamma-Quant abstrahlt.



(6.2)

Z.B. bei Dittmaier [1] oder Gastmans/Wu [7] findet sich die vollständige Amplitude für obigen Prozeß, wobei hier allerdings nur die reinen QED-

Terme betrachtet werden; Korrekturen durch den Z-Austausch und die Higgs- und Goldstone-Diagramme werden nicht berücksichtigt. Hierbei findet auf die bekannte Art die Zerlegung der Impulsvektoren der Elektronen und Myonen statt:

$$\begin{aligned} P_{\dot{A}B} &= \textstyle\sum_{i=1,2} \kappa_{i,\dot{A}}\kappa_{i,B}, \qquad P'_{\dot{A}B} = \textstyle\sum_{i=1,2} \kappa'_{i,\dot{A}}\kappa'_{i,B}, \\ Q_{\dot{A}B} &= \textstyle\sum_{i=1,2} \rho_{i,\dot{A}}\rho_{i,B}, \qquad Q'_{\dot{A}B} = \textstyle\sum_{i=1,2} \rho'_{i,\dot{A}}\rho'_{i,B}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Die Dirac-Spinoren des Prozesses (zu Lösungen der Dirac-Gleichung, ausgedrückt durch WvdW-Spinoren s. Anhang A) sind dabei gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_{p',\sigma'} &= (\psi'^A, \phi'_{\dot{A}}) \quad \text{mit} \quad (\phi', \psi') = \begin{cases} (\kappa'_1, -\kappa'_2) & \text{für } \sigma' = + \\ (\kappa_2, \kappa_1) & \text{für } \sigma' = - \end{cases} \\
\Psi_{p,\sigma} &= \begin{pmatrix} \phi_A \\ \psi^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\phi, \psi) = \begin{cases} (\kappa_1, \kappa_2) & \text{für } \sigma = - \\ (-\kappa_2, \kappa_1) & \text{für } \sigma = + \end{cases} \\
\overline{\Psi}_{q,\tau} &= (\eta^A, \xi_{\dot{A}}) \quad \text{mit} \quad (\xi, \eta) = \begin{cases} (\rho_1, -\rho_2) & \text{für } \tau = + \\ (\rho_2, \rho_1) & \text{für } \tau = - \end{cases} \\
\Psi_{q',\tau'} &= \begin{pmatrix} \xi'_A \\ \eta'^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\xi', \eta') = \begin{cases} (\rho'_1, \rho'_2) & \text{für } \tau' = - \\ (-\rho'_2, \rho'_1) & \text{für } \tau' = + \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Da die Wechselwirkung hier nur durch neutrale Ströme vermittelt wird, kann man, da die jeweiligen Ströme separat erhalten sind, die Eichspinoren für Anfangs- und Endzustands-Bremsstrahlung unabhängig voneinander wählen, auf die bereits angesprochene Weise:

Für die Anfangszustands-Abstrahlung wählt man den Eichspinor als Kontraktion des Photonenimpulsspinors mit dem Impulsspinor des Elektrons:

$$g_A = P_{A\dot{B}}k^{\dot{B}} = \sum_{i=1,2} \kappa_{i,A} \langle \kappa_i k \rangle^* , \tag{6.5}$$

während man bei der Endzustands-Abstrahlung entsprechend den Photonen-Impulsspinor mit dem Impulsspinor des Myons kontrahiert:

$$g_A = Q_{A\dot{B}}k^{\dot{B}} = \sum_{i=1,2} \rho_{i,A} \langle \rho_i k \rangle^* \tag{6.6}$$

Selbstverständlich kann man auch mit den Impulsspinoren der jeweiligen Antiteilchen kontrahieren, dies führt zu gleichen Ergebnissen mit entsprechenden Vereinfachungen in ähnlichem Umfang. Das Ergebnis nach einigen Seiten Rechnung und diversen Schouten-Identitäten lautet (s. [1]):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{\text{massiv}}(\sigma', \sigma, \tau', \tau, +) = \\
&\sqrt{2}e^3 \Bigg\{ \left[\frac{\langle kQ'Qk \rangle}{2(q\cdot k)(q'\cdot k)(p+p')^2} - \frac{\langle kP'Pk \rangle}{2(p\cdot k)(p'\cdot k)(q+q')^2} \right] \\
&\times \Big(\langle \phi'\xi \rangle^* \langle \phi\xi' \rangle + \langle \phi'\eta' \rangle^* \langle \phi\eta \rangle + \langle \psi\xi \rangle^* \langle \psi'\xi' \rangle + \langle \psi\eta' \rangle^* \langle \psi'\eta \rangle \Big) \\
&+ \frac{1}{(q+q')^2} \left[\frac{\langle k\phi' \rangle^*}{(p'\cdot k)} \Big(\langle k\xi \rangle^* \langle \phi\xi' \rangle + \langle k\eta' \rangle^* \langle \phi\eta \rangle \Big) \right. \\
&\left. - \frac{\langle k\psi \rangle^*}{(p\cdot k)} \Big(\langle k\psi \rangle^* \langle \psi'\xi' \rangle + \langle k\eta' \rangle^* \langle \psi'\eta \rangle \Big) \right] \\
&+ \frac{1}{(p+p')^2} \left[\frac{\langle k\xi \rangle^*}{(q\cdot k)} \Big(\langle k\phi' \rangle^* \langle \phi\xi' \rangle + \langle k\psi \rangle^* \langle \psi'\xi' \rangle \Big) \right. \\
&\left. - \frac{\langle k\eta' \rangle^*}{(q'\cdot k)} \Big(\langle k\phi' \rangle^* \langle \phi\eta \rangle + \langle k\psi \rangle^* \langle \psi'\eta \rangle \Big) \right] \Bigg\} \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

Die kompakten Symbole $\langle kP'Pk \rangle$ bilden dabei eine natürliche Abkürzung für eine aus vier Termen (Produkte von je drei Spinorprodukten) aufgebaute Summe:

$$
\langle kP'Pk \rangle \equiv k_{\dot{A}} P'^{\dot{A}B} P_{\dot{C}B} k^{\dot{C}} = \sum_{i,j=1,2} \langle k\kappa_i' \rangle^* \langle \kappa_j \kappa_i' \rangle \langle \kappa_j k \rangle^* , \qquad (6.8)
$$

und entsprechend für Q.

Diese Amplitude kann man nun sozusagen schrittweise ihrer Massen berauben: Zunächst ist zu bemerken, daß die Elektronenmassen im Rahmen der numerischen Genauigkeit der Rechnungen nicht ins Gewicht fallen, d.h. Mitnahme der Massen der Elektronen ändert die Größe der Amplitude nur innerhalb des numerischen Rauschens (natürlich nur, solange der Winkel, unter dem das Photon von den Elektronen emittiert wird, hinreichend groß ist!). Aus diesem Grund kann man sich darauf beschränken, diejenige Amplitude zu betrachten, bei der sämtliche Spinoren κ_2 und κ_2' identisch Null gesetzt sind.

Wir werden uns bei der expliziten Angabe von Formeln von nun an auf den Spezialfall $\mathcal{M}(\sigma' = +, \sigma = -, \tau' = +, \tau = -, \lambda = +)$ einschränken, die anderen Amplituden verhalten sich völlig analog. Ohnehin hat man in der QED als einer die Parität erhaltenden Theorie die vollen diskreten Symmetrien der Quantenfeldtheorie zur Verfügung, um die Zahl der tatsächlich zu bestimmenden Amplituden zu reduzieren. Bei der oben verwendeten Folge der Helizitätsbezeichnungen sind dies im Falle, daß alle Fermionenmassen identisch Null gesetzt wurden, nur die Kombinationen: $(+,-,+,-,+)$, $(+,-,-,+,+)$, $(-,+,-,+,+)$ und $(-,+,+,-,+)$, während unter der Annahme nichtverschwindender Myonenmasse außerdem noch die Amplituden $(+,-,+,+,+)$, $(+,-,-,-,+)$, $(-,+,+,+,+)$ sowie $(-,+,-,-,+)$ hinzukommen.

Für die voll massive Amplitude (6.7) ergibt sich bei verschwindender Elektronenmasse

$$\mathcal{M}_{(m_e=0)}(+,-,+,-,+) =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}e^3\Bigg\{&\left[\frac{\langle kQ'Qk\rangle}{2(q\cdot k)(q'\cdot k)(p+p')^2}-\frac{\langle kP'Pk\rangle}{2(p\cdot k)(p'\cdot k)(q+q')^2}\right]\\ &\times\Big(\langle\kappa\rho_1'\rangle^*\langle\kappa'\rho_1\rangle-\langle\kappa\rho_2\rangle^*\langle\kappa'\rho_2'\rangle\Big)\\ &+\frac{1}{(q+q')^2}\cdot\frac{\langle k\kappa\rangle^*}{(p\cdot k)}\Big(\langle k\rho_2\rangle^*\langle\kappa'\rho_2'\rangle+\langle k\rho_1'\rangle^*\langle\kappa'\rho_1\rangle\Big)\\ &-\frac{1}{(p+p')^2}\left[\frac{\langle k\rho_2\rangle^*}{(q\cdot k)}\cdot\langle k\kappa\rangle^*\langle\kappa'\rho_2'\rangle+\frac{\langle k\rho_1'\rangle^*}{(q'\cdot k)}\cdot\langle k\kappa\rangle^*\langle\kappa'\rho_1\rangle\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.9}$$

Der Ausdruck (6.8) vereinfacht sich für die Elektronenseite zu einem einzigen Summanden

$$\langle kP'Pk\rangle=\langle k\kappa'\rangle^*\langle\kappa\kappa'\rangle\langle\kappa k\rangle^*. \tag{6.10}$$

Die nach den in den vorangehenden Kapiteln beschriebenen Regeln genäherte Amplitude nimmt nun die folgende Gestalt an, wobei auch die bisher verwendeten Abkürzungen bezüglich der Spinoren 1. und 2. Art zum Einsatz kommen. Bei dem Ausdruck (6.8) unterscheiden wir hier speziell zwischen dem vollen massiven Ausdruck und dem Term bei verschwindender Masse:

$$\begin{aligned}\langle kP'Pk\rangle\equiv&\langle k\kappa_1'\rangle^*\langle\kappa_1\kappa_1'\rangle\langle\kappa_1 k\rangle^*+\\ &\langle k\kappa_2'\rangle^*\langle\kappa_1\kappa_2'\rangle\langle\kappa_1 k\rangle^*+\\ &\langle k\kappa_1'\rangle^*\langle\kappa_2\kappa_1'\rangle\langle\kappa_2 k\rangle^*+\\ &\langle k\kappa_2'\rangle^*\langle\kappa_2\kappa_2'\rangle\langle\kappa_2 k\rangle^*\end{aligned} \tag{6.11}$$

im Gegensatz zu

$$\langle kP'Pk\rangle_0\equiv\langle k\kappa'\rangle^*\langle\kappa\kappa'\rangle\langle\kappa k\rangle^* \tag{6.12}$$

Der massengenäherte Term hat demgegenüber die Gestalt

$$\begin{aligned}\langle kP'Pk\rangle_{\text{massengenähert}} \equiv \langle k\kappa'\rangle^* \langle \kappa\kappa'\rangle \langle \kappa k\rangle^* \cdot \left(1 - \frac{m_f^2}{4p_0^2} - \frac{m_f^2}{4p_0'^2}\right) + \\ m_f^2 \cdot \langle k\tilde{\kappa}'\rangle^* \langle \kappa\tilde{\kappa}'\rangle \langle \kappa k\rangle^* + \\ m_f^2 \cdot \langle k\kappa'\rangle^* \langle \tilde{\kappa}\kappa'\rangle \langle \tilde{\kappa}k\rangle^* .\end{aligned} \tag{6.13}$$

Setzt man alle diese Abkürzungen ein und bricht die Massenentwicklung nach der quadratischen Ordnung ab, ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_{\text{massengenähert}}(+,-,+,-,+) = \\ &\sqrt{2}e^3 \Bigg\{ \frac{\langle kQ'Qk\rangle_0}{2(q\cdot k)(q'\cdot k)(p+p')^2} \Bigg[\langle \kappa\rho'\rangle^* \langle \kappa'\rho\rangle \left(1 - \frac{3m_\mu^2}{8q_0^2} - \frac{3m_\mu^2}{8q_0'^2}\right) \\ &\qquad - m_\mu^2 \langle \kappa\tilde{\rho}\rangle^* \langle \kappa'\tilde{\rho}'\rangle \Bigg] \\ &- \frac{\langle kP'Pk\rangle_0}{2(p\cdot k)(p'\cdot k)(q+q')^2} \Bigg[\langle \kappa\rho'\rangle^* \langle \kappa'\rho\rangle \left(1 - \frac{m_\mu^2}{8q_0^2} - \frac{m_\mu^2}{8q_0'^2}\right) - m_\mu^2 \langle \kappa\tilde{\rho}\rangle^* \langle \kappa'\tilde{\rho}'\rangle \Bigg] \\ &+ \frac{m_\mu^2 \left(\langle k\tilde{\rho}'\rangle^* \langle \rho\tilde{\rho}'\rangle \langle \rho k\rangle^* + \langle k\rho'\rangle^* \langle \tilde{\rho}\rho'\rangle \langle \tilde{\rho}k\rangle^*\right)}{2(q\cdot k)(q'\cdot k)(p+p')^2} \langle \kappa\rho'\rangle^* \langle \kappa'\rho\rangle \\ &+ \frac{1}{(q+q')^2} \cdot \frac{\langle k\kappa\rangle^*}{(p\cdot k)} \Bigg[m_\mu^2 \langle k\tilde{\rho}\rangle^* \langle \kappa'\tilde{\rho}'\rangle + \langle k\rho'\rangle^* \langle \kappa'\rho\rangle \left(1 - \frac{m_\mu^2}{8q_0^2} - \frac{m_\mu^2}{8q_0'^2}\right) \Bigg] \\ &\qquad - \frac{1}{(p+p')^2} \Bigg[\frac{m_\mu^2 \langle k\tilde{\rho}\rangle^*}{(q\cdot k)} \cdot \langle k\kappa\rangle^* \langle \kappa'\tilde{\rho}'\rangle + \\ &\qquad \frac{\langle k\rho'\rangle^*}{(q'\cdot k)} \cdot \langle k\kappa\rangle^* \langle \kappa'\rho\rangle \left(1 - \frac{m_\mu^2}{8q_0^2} - \frac{m_\mu^2}{8q_0'^2}\right) \Bigg] \Bigg\}\end{aligned} \tag{6.14}$$

Hierbei beachte man, daß im Sinne des in Abschnitt 4.2 Gesagten die Vektorprodukte in den Nennern ungenähert bleiben. Man könnte in den Vektorprodukten sogar die Elektronenmasse beibehalten, um die Singularitäten bei kollinearer Anfangszustandsabstrahlung zu vermeiden.

Zunächst sieht diese Amplitude komplizierter als die massive (6.9) aus; man muß jedoch bedenken, daß in (6.9) viele komplexe Terme in Form von Abkürzungen zusammengefaßt wurden; schriebe man diese Abkürzungen aus, erhielte man einen Ausdruck, der noch länger als derjenige der massengenäherten Amplitude wäre. Entscheidend für die Komplexität der jeweiligen Amplitude ist die Zahl der zu berechnenden elementaren Spinorprodukte. Hier tritt aufgrund der Einfachheit des Prozesses $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$

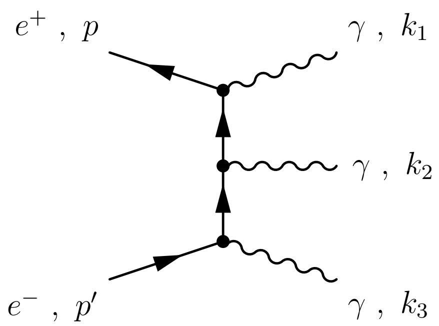
noch kein so großer Unterschied zutage zwischen der Dittmaier'schen und der massengenäherten Amplitude, da in der massiven Amplitude nicht so viele Terme vorkommen, die aufgrund des Vernachlässigens von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^4)$ wegfallen. Bei komplexeren Prozessen mit mehreren Fermionen/Antifermionen wird die Gesamtzahl der zu berechnenden Spinorprodukte für die massengenäherte Amplitude deutlich unter derjenigen der Dittmaier'schen bleiben. Dann wird die Näherung auch analytisch weniger aufwendig sein als die exakte Rechnung, neben der leichteren Implementierung der masselosen Spinorprodukte bei numerischen Rechungen ist das ein weiterer Vorteil, den die Näherung bietet. Mit den drei Amplituden in (6.7), (6.9) und (6.14) wurden die numerischen Rechnungen für die Kurven auf Seite 27 durchgeführt.

6.2 $\mu^+\mu^- \to \gamma\gamma\gamma$

Nach diesem grundlegenden Test soll nun mit der Zerstrahlung eines Myonenpaares in drei Photonen, also:

$$\mu^+(\sigma', p') + \mu^-(\sigma, p) \to \gamma(\lambda_1, k_1) + \gamma(\lambda_2, k_2) + \gamma(\lambda_3, k_3) \tag{6.15}$$

ein etwas komplexerer Prozeß betrachtet werden. Dieser ist zwar derzeit noch unrealistisch, da kein Myonen-Collider zur Verfügung steht, wurde aber dem entsprechenden Elektronenzerfall an dieser Stelle vorgezogen, da für die Myonen die gegenüber den Elektronen um den Faktor 200 höhere Masse die Betrachtung der Massenkorrekturen für diesen Prozeß interessant macht. Dessen Amplitude setzt sich aus insgesamt sechs Feynman-Diagrammen zusammen, bzw. das Diagramm des Prozesses besteht aus sechs Beiträgen:



+ fünf weitere Permutationen der Photonen (6.16)

Die Zerlegung der Impulse ist in völliger Analogie zu Abschnitt 6.1, d.h.:

$$P_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \kappa_{i,\dot{A}}\kappa_{i,B}, \quad P'_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \kappa'_{i,\dot{A}}\kappa'_{i,B}. \tag{6.17}$$

Da die Amplitude mit drei Photonen positiver Helizität im Grenzübergang $m \to 0$ verschwindet, wird hier der Fall betrachtet, daß die ersten beiden Photonen positive Helizität aufweisen, das dritte dagegen negative. Aufgrund der Symmetrien (Parität, CP-Symmetrie und dem Austausch der Photonen im Endzustand) kann man aus diesen beiden Amplituden alle anderen Helizitätskombinationen direkt ablesen (s. Abschnitt 2.3). Hier wird im weiteren nur noch die eine Kombination untersucht, bei der das Anti-Myon positive Helizität aufweist, sein Anti-Teilchen negative, die ersten beiden Photonen rechtshändig, das dritte linkshändig ist. Alle anderen Kombinationen unterscheiden sich wegen

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(-\sigma', -\sigma, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3) &= -\operatorname{sgn}(\sigma'\sigma)\mathcal{M}(\sigma', \sigma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^*, \\
\mathcal{M}(-\sigma', -\sigma, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3) &= -\operatorname{sgn}(\sigma'\sigma)\mathcal{M}(\sigma', \sigma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^* \Big|_{p'\leftrightarrow p}, \\
\mathcal{M}(\sigma', \sigma, \lambda_{P(1)}, \lambda_{P(2)}, \lambda_{P(3)}) &= \mathcal{M}(\sigma', \sigma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{k_i \to P(k_i)}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

(P sei hier eine Permutation der Photonindizes) nur in einem relativen Vorzeichen und u.U. durch komplexe Konjugation, insgesamt also nur durch eine Phase. Wesentlich unterschiedliche Beiträge zur spingemittelten Amplitude bekommt man durch unterschiedliche Kombinationen der Myonenhelizitäten.

In völliger Analogie zu (6.5) werden die Eichspinoren der drei Photonen gewählt:

$$g_{n,A} = P_{A\dot{B}}k_n^{\dot{B}} = \sum_{i=1,2} \kappa_{i,A} \langle \kappa_i k_n \rangle^*, \qquad n = 1, 2, 3 \tag{6.19}$$

Ebenso können die Spinorausdrücke der Myonen direkt den ersten beiden Zeilen von (6.4) entnommen werden (hier sind jetzt ja die Myonen die einlaufenden Teilchen). Weiterhin werden auch die Abkürzungen (6.8) bzw. (6.10) – (6.12) in der Verallgemeinerung auf drei verschiedene Photonen aus dem vorhergehenden Abschnitt übertragen:

$$\begin{aligned}
\langle k_n P' P k_n \rangle \equiv\, & \langle k_n \kappa'_1 \rangle^* \langle \kappa_1 \kappa'_1 \rangle \langle \kappa_1 k_n \rangle^* + \\
& \langle k_n \kappa'_2 \rangle^* \langle \kappa_1 \kappa'_2 \rangle \langle \kappa_1 k_n \rangle^* + \\
& \langle k_n \kappa'_1 \rangle^* \langle \kappa_2 \kappa'_1 \rangle \langle \kappa_2 k_n \rangle^* + \\
& \langle k_n \kappa'_2 \rangle^* \langle \kappa_2 \kappa'_2 \rangle \langle \kappa_2 k_n \rangle^* \qquad , \; n = 1, 2, 3 \quad ,
\end{aligned} \tag{6.20}$$

bzw. masselos:

$$\langle k_n P' P k_n \rangle_0 \equiv \langle k_n \kappa' \rangle^* \langle \kappa \kappa' \rangle \langle \kappa k_n \rangle^* \qquad , n = 1, 2, 3 \tag{6.21}$$

Als nützlich erweist es sich, noch eine Kurzform eines kompakten Ausdrucks zu benutzen, der nur als Bauteil der massiven Amplitude benötigt wird:

$$\langle k_m P k_n \rangle \equiv k_{m,\dot{A}} P^{\dot{A}B} k_{n,B} = \langle k_m \kappa_1 \rangle^* \langle k_n \kappa_1 \rangle + \langle k_m \kappa_2 \rangle^* \langle k_n \kappa_2 \rangle \tag{6.22}$$

Auch hiervon kann man problemlos die Entwicklung nach Potenzen der Myonenmassen angeben:

$$\langle k_m P k_n \rangle = \langle k_m \kappa \rangle^* \langle k_n \kappa \rangle \cdot \left(1 - \frac{m_f^2}{4p_0^2}\right) + m_f^2 \cdot \langle k_m \tilde{\kappa} \rangle^* \langle k_n \tilde{\kappa} \rangle \tag{6.23}$$

Nachdem jetzt alles zusammengetragen wurde, kann man die beiden Amplituden zusammenbauen; es werden hier nur die voll massive und die massengenäherte Amplitude aufgeführt, aus letzterer läßt sich problemlos durch den Limes $m \to 0, \tilde{\kappa}, \tilde{\kappa}' \to 0$ die masselose Amplitude rekonstruieren.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{\text{massiv}}(+,-;+,+,-) = \\
&\quad \frac{-e^3}{4\sqrt{2}(p\cdot k_1)(p\cdot k_2)(p\cdot k_3)} \Bigg\{ m_\mu \frac{(\langle k_1 k_2 \rangle^*)^2}{(p'\cdot k_3)} \Big[\langle k_3 P' P k_3 \rangle^* \langle \kappa_2 \kappa_1' \rangle \\
&\qquad + 2(p\cdot k_3) \langle k_3 \kappa_2 \rangle \langle k_3 \kappa_1' \rangle \Big] \\
&\quad - \frac{\langle k_2 P k_3 \rangle}{(p'\cdot k_1)} \Big[\langle k_1 P' P k_1 \rangle \Big(\langle k_2 \kappa_1 \rangle^* \langle k_3 \kappa_1' \rangle - \langle k_2 \kappa_2' \rangle^* \langle k_3 \kappa_2 \rangle \Big) \\
&\qquad - 2(p\cdot k_1) \langle k_3 \kappa_2 \rangle \langle k_1 \kappa_2' \rangle^* \langle k_1 k_2 \rangle^* \Big] \\
&\quad - \frac{\langle k_1 P k_3 \rangle}{(p'\cdot k_2)} \Big[\langle k_2 P' P k_2 \rangle \Big(\langle k_1 \kappa_1 \rangle^* \langle k_3 \kappa_1' \rangle - \langle k_1 \kappa_2' \rangle^* \langle k_3 \kappa_2 \rangle \Big) \\
&\qquad - 2(p\cdot k_2) \langle k_3 \kappa_2 \rangle \langle k_2 \kappa_2' \rangle^* \langle k_2 k_1 \rangle^* \Big] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Demgegenüber hat man für die massengenäherte Amplitude

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{\text{massengenähert}}(+,-;+,+,-) = \\
&\quad \frac{-e^3}{4\sqrt{2}(p\cdot k_1)(p\cdot k_2)(p\cdot k_3)} \Bigg\{ m_\mu^2 \frac{(\langle k_1 k_2 \rangle^*)^2}{(p'\cdot k_3)} \Big[\langle k_3 P' P k_3 \rangle_0^* \langle \tilde{p} p' \rangle \\
&\qquad + 2(p\cdot k_3) \langle k_3 \tilde{p} \rangle \langle k_3 p' \rangle \Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{m_\mu^2 \langle k_2 p\rangle^* \langle k_3 p\rangle}{(p'\cdot k_1)} \cdot \Big[\langle k_1 P' P k_1\rangle_0 \langle k_2 \tilde{p}'\rangle^* \langle k_3 \tilde{p}\rangle + 2(p\cdot k_1) \langle k_3 \tilde{p}\rangle \langle k_1 \tilde{p}'\rangle^* \langle k_1 k_2\rangle^* \Big] \\
&+ \frac{m_\mu^2 \langle k_1 p\rangle^* \langle k_3 p\rangle}{(p'\cdot k_2)} \cdot \Big[\langle k_2 P' P k_2\rangle_0 \langle k_1 \tilde{p}'\rangle^* \langle k_3 \tilde{p}\rangle + 2(p\cdot k_2) \langle k_3 \tilde{p}\rangle \langle k_2 \tilde{p}'\rangle^* \langle k_2 k_1\rangle^* \Big] \\
&\qquad - \frac{\langle k_2 p\rangle^* \langle k_3 p'\rangle}{(p\cdot k_1)} \Big[\langle k_1 P' P k_1\rangle_0 \langle k_2 p\rangle^* \langle k_3 p\rangle \Big(1 - \frac{5m_\mu^2}{8p_0^2} - \frac{3m_\mu^2}{8p_0'^2}\Big) \\
&\qquad\quad + m_\mu^2 \langle k_1 P' P k_1\rangle_0 \langle k_2 \tilde{p}\rangle^* \langle k_3 \tilde{p}\rangle + m_\mu^2 \langle k_2 p\rangle^* \langle k_3 p\rangle \cdot \\
&\qquad\qquad \Big(\langle k_1 \tilde{p}'\rangle^* \langle p\tilde{p}'\rangle \langle p k_1\rangle^* + \langle k_1 p'\rangle^* \langle \tilde{p} p'\rangle \langle \tilde{p} k_1\rangle^*\Big)\Big] \\
&\qquad - \frac{\langle k_1 p\rangle^* \langle k_3 p'\rangle}{(p\cdot k_2)} \Big[\langle k_2 P' P k_2\rangle_0 \langle k_1 p\rangle^* \langle k_3 p\rangle \Big(1 - \frac{5m_\mu^2}{8p_0^2} - \frac{3m_\mu^2}{8p_0'^2}\Big) \\
&\qquad\quad + m_\mu^2 \langle k_2 P' P k_2\rangle_0 \langle k_1 \tilde{p}\rangle^* \langle k_3 \tilde{p}\rangle + m_\mu^2 \langle k_1 p\rangle^* \langle k_3 p\rangle \cdot \\
&\qquad\qquad \Big(\langle k_2 \tilde{p}'\rangle^* \langle p\tilde{p}'\rangle \langle p k_2\rangle^* + \langle k_2 p'\rangle^* \langle \tilde{p} p'\rangle \langle \tilde{p} k_2\rangle^*\Big)\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

Auch hier werden die Vektorprodukte in den Nennern wie in den Zählern der Amplitude mit den auf der Massenschale liegenden Impulsen berechnet, wie in den Abschnitten 4.2 und 6.1 schon diskutiert.

Für die spingemittelte Amplitude benötigt man alle verschiedenen Kombinationen von Helizitäten; bei Dittmaier ([1], Gleichung (5.14/15)) findet man das Ergebnis einer Rechnung mittels WvdW-Spinoren, das an dieser Stelle zitiert wird:

$$
\mathcal{M}_{\text{massiv}}(\sigma', \sigma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{-e^3 A_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(\sigma', \sigma)}{4\sqrt{2}(p\cdot k_1)(p\cdot k_2)(p\cdot k_3)}, \tag{6.26}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
A_{+++}(\sigma', \sigma) =& m_\mu \frac{(\langle k_2 k_3\rangle^*)^2}{(p'\cdot k_1)} \langle k_1 P' P k_1\rangle \langle \phi\psi'\rangle + \text{ zyklische Permutationen der } k_1, k_2, k_3 \\
A_{++-}(\sigma', \sigma) =& m_\mu \frac{(\langle k_1 k_2\rangle^*)^2}{2(p'\cdot k_3)} \big(\langle k_3 P' P k_3\rangle^* \langle \phi\psi'\rangle + 2(p\cdot k_3) \langle k_3 \phi\rangle \langle k_3 \psi'\rangle\big) \\
&- \frac{\langle k_2 P k_3\rangle}{(p'\cdot k_1)} \Big[\langle k_1 P' P k_1\rangle \big(\langle k_2 \psi\rangle^* \langle k_3 \psi'\rangle + \langle k_2 \phi'\rangle^* \langle k_3 \phi\rangle\big) \\
&\quad + 2(p\cdot k_1) \langle k_3 \phi\rangle \langle k_1 \phi'\rangle^* \langle k_1 k_2\rangle^* \Big] + \quad (k_1 \leftrightarrow k_2).
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Für die Spinoren ϕ, ϕ', ψ und ψ' hat man diejenigen Ausdrücke einzusetzen, wie sie in der Liste (6.4) für die Elektronen zusammengestellt sind. Um daraus die genäherten Amplituden zu gewinnen, kann man direkt die in den Kapiteln 3 und 4 besprochenen Ersetzungen machen. Dies entspricht zwar nicht dem Weg, die massengenäherten Terme üblicherweise zu erhalten; aber wenn man schon die massive Amplitude zur Verfügung hat (siehe die Bemerkung oben), dann kann man sich dadurch einigen analytischen Aufwand ersparen (den man selbstverständlich vorher aufbringen mußte, um die vollständige Amplitude zu bekommen). Es sei noch darauf hingewiesen, daß die oben angegebenen beiden Kombinationen der Photonenhelizitäten bereits alle Amplituden bestimmen, da man sich über die Formeln (6.18) alle fehlenden Helizitätsamplituden verschaffen kann.

6.3 Vergleich zwischen massivem und massengenähertem Formalismus

Für den durchaus nichttrivialen Prozeß $\mu^+\mu^- \to \gamma\gamma\gamma$ kann man mittels der Amplituden (6.24) und (6.25) einen Vergleich bezüglich der Geschwindigkeiten der beiden Formalismen - des Dittmaier'schen für voll massive Amplituden und der Massennäherung - sowie bezüglich der Güte der Näherung und der Rechtfertigung eines Abbruchs der Massenentwicklung nach der quadratischen Ordnung durchführen. Wie bereits gesagt, ist die Zahl der zu berechnenden, elementaren Spinorprodukte für die Massennäherung nur minimal geringer als bei der massiven Amplitude, da an dem Prozeß lediglich ein Paar massiver Fermionen teilnimmt. An der Gestalt der massiven Amplitude in Abhängigkeit von den jeweiligen Helizitäten der Myonen und der Photonen (siehe die Formeln (6.26), (6.27)) kann man ablesen, von welcher führenden Ordnung diese ist. In der Tabelle 6.1 findet man diese führenden Ordnungen zusammengestellt. Dabei kann man aus jeder Amplitude mit drei positiven Photonhelizitäten durch Paritätstransformation eine weitere Amplitude gewinnen, wenn man alle Helizitäten invertiert (siehe (6.18)), während aus jeder Helizitätsamplitude mit den Photonhelizitäten $(++-)$ über die Parität und den Austausch der Photonen als Bosonen im Endzustand fünf weitere Amplituden folgen: Jene beiden mit gleichen Myonenhelizitäten, aber $(+-+)$ und $(-++)$ als Helizitäten der Photonen sowie dann durch Paritätstransformation die drei invertierten Amplituden. Insgesamt werden also statt 32 nur acht Amplituden zur Berechnung benötigt. Die Angaben in Tabelle 6.1 sind auch physikalisch verständlich, da bekannt ist, daß ein masseloses Fermion-

Antifermion-Paar nur dann in Photonen zerstrahlen kann (bei *einem* Photon muß dieses wegen der 4-Impulserhaltung virtuell sein), wenn die Helizitäten von Fermion und Antifermion entgegengesetzt sind. Im Limes $m_\mu \to 0$ bleiben nur die $\mathcal{O}(1)$-Terme übrig, welches genau der angesprochenen Helizitätskombination der Myonen entspricht. Der Zerfall des Myonenpaares in drei Photonen gleicher Helizität ist allerdings wieder nur für massive Fermionen erlaubt.

Um die Güte der Näherung zu demonstrieren, sind in der Tabelle 6.2 auf der folgenden Seite für die unterschiedlichen Helizitätskombinationen des Prozesses $\mu^+\mu^- \to \gamma\gamma\gamma$ bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 100$ GeV die relativen Abweichungen des massengenäherten Formalismus von den exakten, voll massiven Ausdrücken aufgeführt. Die Kombination $(-,-;+,+,+)$ ist weggelassen worden, da diese Amplitude gemäß Tabelle 6.1 bereits von dritter Ordnung in der Masse ist und im Rahmen der Entwicklung, die ja nach der quadratischen Ordnung abbricht, nicht mehr berücksichtigt wird. Ebenfalls unterdrückt sind die beiden Amplituden mit den Helizitätskombinationen $(+,-;+,+,+)$ und $(-,+;+,+,+)$, die aufgrund der speziellen Wahl der kinematischen Ausgangssituation (Kollider-Experiment mit entgegengesetzt gleichen räumlichen Impulsen der Myonen auf der z-Achse) verschwinden. Diese Amplituden sind nämlich proportional zu dem Spinorprodukt $\langle\kappa_2\kappa_1'\rangle$ bzw. $\langle\kappa_1\kappa_2'\rangle$; in Anhang D wird gezeigt, daß der Spinor 2. Art bis auf einen Vorfaktor dem paritätstransformierten Spinor entspricht. Da die Impulsvektoren von Myon und Antimyon durch Paritätstransformation ineinander übergehen (Kollider-Experiment!), sind also der Spinor 1. Art des Myons und derjenige 2. Art des Antimyons (und umgekehrt) zueinander proportional, das Spinorprodukt der beiden muß verschwinden.

Helizitätsamplitude	führende Ordnung
$\mathcal{M}(+,+;+,+,+)$	$\mathcal{O}(m_\mu)$
$\mathcal{M}(+,-;+,+,+)$	$\mathcal{O}(m_\mu^2)$
$\mathcal{M}(-,+;+,+,+)$	$\mathcal{O}(m_\mu^2)$
$\mathcal{M}(-,-;+,+,+)$	$\mathcal{O}(m_\mu^3)$
$\mathcal{M}(+,+;+,+,-)$	$\mathcal{O}(m_\mu)$
$\mathcal{M}(+,-;+,+,-)$	$\mathcal{O}(1)$
$\mathcal{M}(-,+;+,+,-)$	$\mathcal{O}(1)$
$\mathcal{M}(-,-;+,+,-)$	$\mathcal{O}(m_\mu)$

Tabelle 6.1: Führende Ordnungen der Massenpotenz für die Amplituden des Prozesses $\mu^+\mu^- \to \gamma\gamma\gamma$ in Abhängigkeit der unterschiedlichen Helizitätskombinationen

Man erkennt anhand von Tabelle 6.2, daß die relativen Fehler der massengenäherten Amplituden allesamt von der Größenordnung $10^{-6} - 10^{-7}$ sind, mit der Ausnahme derjenigen Kombinationen von Helizitätsprozessen, die auch im masselosen Grenzfall möglich sind. Für diese Amplituden hat man eine masselose Referenzamplitude zu definieren, die man von den beiden Ergebnissen (massengenähert und voll massiv) abzuziehen hat, um dann für die Differenzen beider Formalismen zum masselosen Referenzergebnis die relative Abweichung zu ermitteln (dies wurde bereits in Abschnitt 3.2 durchgeführt, dort allerdings am Beispiel des Prozesses $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$, siehe Abbildung 3.4). Dabei gelangt man konsistenterweise wieder zu einem relativen Fehler der Näherung von der Ordnung 10^{-7}. Der in den Kapiteln 3 und 4 entwickelte Näherungsformalismus erreicht also im Bereich einer Schwerpunktsenergie, die vier Größenordnungen über den Massen der schwersten am Prozeß beteiligten Fermionen liegt, eine Genauigkeit von mindestens 10^{-6}! Führt man die Rechnungen in einem Energieregime durch, das nur noch eine Größenordnung über den Massen der schwersten Fermionen liegt, dann fällt die Genauigkeit auf einen Wert, der aber immer noch im Subprozentbereich liegt und damit für die Berechnung von Wirkungsquerschnitten ausreichend ist.

qUnterzieht man die beiden Formalismen einem Geschwindigkeitstest, in-

Helizitätsamplitude	relative Abweichung
$\mathcal{M}(+,+:+,+,+)$	$4,19 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{M}(+,+:+,+,-)$	$6,32 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{M}(+,+:+,-,+)$	$6,19 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{M}(+,+:-,+,+)$	$8,31 \cdot 10^{-7}$
$\mathcal{M}(+,-:+,+,-)$	$9,27 \cdot 10^{-13}$ (*)
$\mathcal{M}(+,-:+,-,+)$	$2,03 \cdot 10^{-13}$ (*)
$\mathcal{M}(+,-:-,+,+)$	$4,97 \cdot 10^{-14}$ (*)
$\mathcal{M}(-,+:+,+,-)$	$5,47 \cdot 10^{-13}$ (*)
$\mathcal{M}(-,+:+,-,+)$	$2,30 \cdot 10^{-13}$ (*)
$\mathcal{M}(-,+:-,+,+)$	$3,44 \cdot 10^{-14}$ (*)
$\mathcal{M}(-,-:+,+,-)$	$2,09 \cdot 10^{-6}$
$\mathcal{M}(-,-:+,-,+)$	$3,40 \cdot 10^{-6}$
$\mathcal{M}(-,-:-,+,+)$	$3,30 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 6.2: Relative Abweichungen der massengenäherten Amplituden von den exakten Ergebnissen des Dittmaier'schen Formalismus an dem Beispiel $\mu^+\mu^- \to \gamma\gamma\gamma$ bei $\sqrt{s} = 100$ GeV . (*) Relativer Fehler der Amplituden einschließlich der $\mathcal{O}(1)$-Terme, s. Text.

dem man beispielsweise für alle Helizitätskombinationen des oben betrachteten Prozesses $\mu^+\mu^- \to \gamma\gamma\gamma$ bei 10^7 verschiedenen kinematischen Konstellationen die Matrixelemente des Prozesses berechnet, stellt man fest, daß der massengenäherte Formalismus im Mittel um 25 - 30 % schneller als der Dittmaier'sche Formalismus der exakten Amplituden ist. Die höhere Rechengeschwindigkeit kommt zu einem geringen Teil dadurch zustande, daß man, wie im Laufe dieses Abschnitts bereits angesprochen, für die massengenäherten Amplituden eine kleinere Zahl an fundamentalen Spinorprodukten auszurechnen hat. Dieser Faktor wird bei komplexeren Prozessen noch an Bedeutung gewinnen. Der überwigende Teil der Zeitersparnis kommt jedoch dadurch zustande, daß die Spinorprodukte der Massennäherung selbst einfacher aufgebaut sind als bei der massiven Rechnung, wo sich Energien und Beträge der räumlichen Komponenten der Impulsvektoren unterscheiden und somit eine explizite Implementierung von trigonometrischen Funktionen der halbzahligen Winkelargumente in den Spinorprodukten unumgänglich ist, was durch die geschickte Wahl der beiden Spinoren 1. und 2. Art der Massennäherung, (4.3) bzw. (4.4), vermieden wird.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, einen Näherungsformalismus für Helizitätsamplituden massiver Fermionen zu entwickeln, mit dem es möglich ist, die Vorteile der einfachen Implementierung fundamentaler Spinoren masseloser Fermionen (s. [2]) zu nutzen und andererseits Korrekturen in den Massenpotenzen in führender, d.h. maximal quadratischer Ordnung zu berücksichtigen. Die Mitnahme dieser Terme ist unumgänglich geworden durch die Genauigkeit heutiger Hochenergieexperimente, deren Ergebnisse deutliche Differenzen zu theoretischen Rechnungen unter der Annahme masseloser Fermionen zu Tage fördern.

Zur analytischen Beschreibung von Helizitätsamplituden wurde der Formalismus der Weyl-van der Waerden-Spinoren ([1], [7]) gewählt, da diese als Elemente der irreduziblen Darstellungsräume der rechts- und linkshändigen Fermionen das optimale Werkzeug bilden. Um die Helizitätsamplituden nach den Potenzen der Fermionenmassen entwickeln zu können, muß die genaue Struktur der Fermionenlinien betrachtet werden (Kapitel 2 und 4). Die Massen der Fermionen treten zum einen explizit durch die zur Einheitsmatrix proportionalen Summanden der Fermionenpropagatoren, zum anderen über die äußeren Zustände der Fermionen und die zu $\not{p}$ proportionalen Terme der Fermionenpropagatoren in den Amplituden auf. Mittels einer Zerlegung der Fermionenpropagatoren in einen masselosen Anteil und einen „Massenterm" (s. Kapitel 4 und Anhang C) läßt sich die voll massive Amplitude in $\mathcal{O}(1)$-Terme, die im strikten Grenzprozeß $m \to 0$ überleben, sowie lineare und quadratische Terme in den Massen aufspalten.

Weiterhin müssen die Impuls- und Polarisationsvektoren massiver Fermionen (sowie auch der Photonen, s. Abschnitt 4.4) in eine Potenzreihe nach den Massen entwickelt werden. Hierzu dient die Möglichkeit, einen massiven Impulsvektor auf eine „kanonische", nichttriviale Weise in eine Summe zweier lichtartiger Vektoren zu zerlegen (s. Kapitel 3). Somit kann man die Zerlegung eines Impulsspinors 2. Stufe nach seiner Eigenbasis von Helizitätskomponenten des zugehörigen elementaren Fermions uminterpretieren als eine Zerlegung nach einer Spinorbasis, deren Elemente aber als reine Dyaden von Impulsspinoren masseloser Fermionen angesehen werden können. Die Vorfaktoren dieser Impulsspinoren, also die Komponenten des Impulsspinors (2. Stufe) eines massiven Fermions in obiger Basis hängt von der Energie und den Komponenten des räumlichen Impulses des massiven Fermions ab und kann daher in eine Potenzreihe in der Fermionenmasse entwickelt werden. Man ist damit in der Lage, mit den Basisspinoren wie mit Spinoren aus der Zerlegung von Impulsen masseloser Fermionen zu arbeiten. Die angesprochene alternative Interpretation läßt die Deutung zu, den Prozeß eines massiven Fermions darzustellen als die Summe von vier Prozessen masseloser Fermionen mit allen jeweils möglichen Helizitätskombinationen, was der Tatsache entspricht, daß ein massives Fermion kein Helizitätseigenzustand ist und daher sowohl Anteile positiver als auch negativer Helizität in sich vereint.

Die Benutzung der „masselosen“ Spinoren 1. und 2. Art in der Form (4.3) und (4.4) garantiert eine einfache Implementierung der Spinorprodukte als fundamentaler Bestandteile der Helizitätsamplituden auf dem Computer. Spinorprodukte mit Spinoren aus der Zerlegung massiver Impulsvektoren verlangen die explizite Berechnung von einer Vielzahl trigonometrischer Funktionen; dies kann durch die Benutzung von (4.3) und (4.4) vermieden werden. Damit sind die verwendeten Grundelemente der Massennäherung nur unwesentlich komplexer als diejenigen des masselosen Berends-Giele-Formalismus: Lediglich ein auf ähnliche Weise wie der BG-Spinor zu handhabender Spinor 2. Art kommt hinzu, wodurch ein zweiter Typ von Spinorprodukt nötig wird (s. Kapitel 4 und Anhang D).

Die relativen Fehler, die man durch den Abbruch der Massenentwicklung nach den quadratischen Termen macht, liegen, wie im letzten Kapitel diskutiert im Bereich der Größenordnung $10^{-6} - 10^{-7}$, falls die Schwerpunktsenergien des Prozesses drei bis vier Zehnerpotenzen über der größten vorkommenden Fermionenmasse liegen, und immer noch im Subprozentbereich, wenn man Strahlenergien betrachtet, die die Fermionenmassen lediglich um einen Faktor 10 übertreffen. Insgesamt ist dies vollkommen ausreichend zur numerischen Simulation von Hochenergie-Experimenten mittels des Näherungsformalismus. Erst in der Nähe der Schwelle für die Produktion der schwersten beteiligten Fermionen versagt die Näherung, dort muß dann exakt gerechnet werden.

Der Gewinn an Rechenzeit gegenüber dem Dittmaier'schen Formalismus ist leider nicht in dem Maße gegeben wie ursprünglich erhofft, beträgt aber immerhin 25 – 30 % (Kapitel 6). Dieser Faktor ist sicher noch zu steigern, wenn man kompliziertere Prozesse mit mehr zu berücksichtigenden

Feynman-Diagrammen betrachtet, beispielsweise elektroschwache Prozesse. Dann kommt der primäre Effekt der Massennäherung zum Tragen, daß mehr Terme höherer als quadratischer Ordnung vernachlässigt werden können als bei einfacheren Prozessen und damit die Zahl der zu berechnenden Spinorprodukte des Näherungsformalismus stark unter diejenige des massiven Formalismus sinkt.

Der hier entwickelte Formalismus soll bei der numerischen Simulation elektroschwacher Prozesse Verwendung finden; dazu sollen die massengenäherten Spinorprodukte mittels eines abstrakten Computeralgebra-Programms implementiert werden. Eine weitere mögliche Erweiterung wäre, die Entwicklung nach Massenpotenzen auch auf die massiven Eichbosonen der elektroschwachen Theorie, also $W^{\pm}$ und Z^0 zu erstrecken, da mittlerweile die Strahlenergien bei Hochenergieexperimenten um ein bis zwei Größenordnungen über den Massen dieser Eichbosonen liegen. Dies ist allerdings wegen des „Zustandekommens der Massen“ dieser Teilchen mittels einer spontan gebrochenen Eichtheorie ein anders geartetes Problem als die Entwicklung nach Potenzen der Fermionenmassen.

Anhang A

Spinorrechenregeln

A.1 Elementares zu den fundamentalen Spinoren

Komplexe Konjugation überführt die Darstellungen $D(\frac{1}{2},0)$ und $D(0,\frac{1}{2})$ ineinander:

$$\psi_{\dot{A}} = (\psi_A)^*, \qquad \psi^A = (\psi^{\dot{A}})^*. \tag{A.1}$$

- Spinor-Metrik:

$$\epsilon^{AB} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon_{AB} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

- Konventionen zum Heben und Senken von Indizes mittels der Spinormetrik:

$$\psi^A = \epsilon^{AB}\psi_B, \quad \psi^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\psi_{\dot{B}}, \quad \psi_A = \psi^B\epsilon_{BA}, \quad \psi_{\dot{A}} = \psi^{\dot{B}}\epsilon_{\dot{B}\dot{A}}. \tag{A.3}$$

- Antisymmetrisches Spinorprodukt:

$$\begin{aligned} \langle\phi\psi\rangle &= \phi_A\psi^A = \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 \\ \langle\phi\psi\rangle^* &= \phi_{\dot{A}}\psi^{\dot{A}} = (\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1)^* = \phi_{\dot{1}}\psi_{\dot{2}} - \phi_{\dot{2}}\psi_{\dot{1}}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\langle\phi\psi\rangle = -\langle\psi\phi\rangle, \qquad \langle\phi\phi\rangle = 0 \tag{A.5}$$

Die letzten beiden Eigenschaften gelten nur für c-Zahleinträge in den Spinoren, d.h. sie verlieren ihre Gültigkeit in supersymmetrischen Theorien.

- Schouten-Identität:

$$\epsilon^{AB}\epsilon^{CD} + \epsilon^{AC}\epsilon^{DB} + \epsilon^{AD}\epsilon^{BC} = 0 \tag{A.6}$$

Da die Schouten-Identität *das* Werkzeug für Rechnungen mit Spinor-Amplituden ist, sei hier ein Beweis dieser wichtigen Relation notiert: Hält man in dem Ausdruck

$$\epsilon^{AB}\epsilon^{CD} + \epsilon^{AC}\epsilon^{DB} + \epsilon^{AD}\epsilon^{BC} \tag{A.7}$$

einen Index fest, z.B. das A, dann hat man bezüglich der anderen Indizes BCD einen Tensor 3. Stufe. Vertauscht man von diesen irgend zwei, dann ändert (A.7) sein Vorzeichen. (A.7) ist damit eine 3-Form in einem zweidimensionalen Raum und muß daher notwendig verschwinden.

- Schouten-Identität, mit Spinoren kontrahiert:

$$\langle\phi\psi\rangle\langle\xi\chi\rangle + \langle\phi\xi\rangle\langle\chi\psi\rangle + \langle\phi\chi\rangle\langle\psi\xi\rangle = 0 \tag{A.8}$$

A.2 Minkowski-Vektoren in der Welt der Spinoren

Komponentenschreibweise der Spintensoren für den Übergang von Vektoren von der Tensor- zur Spinordarstellung:

$$\sigma^{\mu,\dot{A}B} = \left(\sigma^0, \vec{\sigma}\right), \qquad \sigma^{\mu}_{A\dot{B}} = \left(\sigma^0, -\vec{\sigma}\right), \tag{A.9}$$

mit der zweidimensionalen Einheitsmatrix σ^0 und der bekannten Definition der Pauli-Matrizen:

$$\sigma^1 = -\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = -\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.10}$$

In der „nichtspinoriellen“ Notation (z.B. in [4]) schreibt sich (A.9) in folgender Gestalt:

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \vec{\sigma}), \qquad \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\vec{\sigma}). \tag{A.11}$$

Kontraktion eines 4-Minkowski-Vektors mit einem Spintensor ergibt einen Spinor 2. Stufe, der für reelle Vektoren durch eine hermitesche 2×2-Matrix dargestellt werden kann:

$$K_{\dot{A}B} = k^\mu \sigma_{\mu,\dot{A}B} = \begin{pmatrix} k^0 + k^3 & k^1 + \mathrm{i}k^2 \\ k^1 - \mathrm{i}k^2 & k^0 - k^3 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

Hermitezität der Spintensoren:

$$\sigma^{\mu,\dot{A}B} = \sigma^{\mu,B\dot{A}}, \qquad \sigma^{\mu}_{A\dot{B}} = \sigma^{\mu}_{\dot{B}A}. \tag{A.13}$$

Die Spintensoren gehorchen den folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu}_{\dot{A}B}\sigma^{\nu,\dot{A}B} &= 2g^{\mu\nu}, \\ \sigma^{\mu}_{\dot{A}B}\sigma^{\nu,\dot{A}C} + \sigma^{\nu}_{\dot{A}B}\sigma^{\mu,\dot{A}C} &= 2g^{\mu\nu}\delta^{C}_{B}, \\ \sigma^{\mu}_{\dot{A}B}\sigma_{\mu,\dot{C}D} &= 2\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Mit der Notation von (A.11) haben diese spinoriellen Relationen folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left[\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right] &= 2g^{\mu\nu}, \\ \sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu} &= 2g^{\mu\nu}\cdot\mathbf{1}, \\ \sigma^{\mu}\bar{\sigma}_{\mu} &= 2\cdot\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Die erste Relation erlaubt es, Skalarprodukte von Minkowski-Vektoren durch Kontraktionen von Spinorprodukten auszudrücken:

$$2k\cdot p = k_{\mu}2g^{\mu\nu}p_{\nu} = k_{\mu}\sigma^{\mu}_{\dot{A}B}\sigma^{\nu,\dot{A}B}p_{\nu} = K_{\dot{A}B}P^{\dot{A}B}, \tag{A.16}$$

die zweite Gleichung stellt die Antivertauschungsrelationen der Sigma-Matrizen, und die dritte die formale Kontraktion des Spintensors als Minkowski-Vektor in spinorieller Form (komponentenweise) dar.

Zerlegung eines massiven Impulsvektors als Spinor nach der Basis seiner Eigenspinoren:

$$\begin{aligned} &K_{\dot{A}B} = \textstyle\sum_{i=1,2}\lambda_i n_{i,\dot{A}} n_{i,B}, \qquad \lambda_{1,2} = k^0 \pm |\vec{k}|, \\ &n_{1,A} = \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad n_{2,A} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{+\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{A.17}$$

wobei θ und ϕ die Polarkoordinaten des räumlichen Impulsvektors $\vec{k}$ sind. Man kann die jeweiligen Eigenwerte auch symmetrisch in die Definition der Eigenspinoren absorbieren:

$$K_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2}\kappa_{i,\dot{A}}\kappa_{i,B}, \quad \kappa_{i,A} = \sqrt{\lambda_i}n_{i,A} \tag{A.18}$$

Diese bevorzugt hier verwendeten Spinoren besitzen untereinander die Spinorprodukte:

$$\langle\kappa_i\kappa_i\rangle = 0, \quad \langle\kappa_2\kappa_1\rangle = -\langle\kappa_1\kappa_2\rangle = +m_f. \tag{A.19}$$

Der Spezialfall eines lichtartigen Vektors sieht so aus, daß der zweite Eigenwert und damit sein zugehöriger Eigenspinor verschwindet, und der Impulsvektor als reines Tensorprodukt eines elementaren Spinors dargestellt werden kann:

$$K_{\dot{A}B} = k^\mu \sigma_{\mu,\dot{A}B} = k_{\dot{A}} k_B, \qquad k_A = \sqrt{2k^0} n_{1,A} = \sqrt{2k^0} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\phi} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{A.20}$$

A.3 Massive Fermionen

Dirac-Spinoren gehören der $D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})$ – Darstellung der Lorentz-Gruppe an und haben folgerichtig die Gestalt:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \psi^{\dot{A}} \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

Der Formalismus der Weyl-van der Waerden-Spinoren ist nur in der chiralen Darstellung möglich, die die chiralen Komponenten der Felder separiert nach ihrem Transformationsverhalten unter der Lorentz-Gruppe. Hier findet deshalb eine chirale Darstellung der Dirac'schen Gamma-Matrizen Verwendung:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{A\dot{B}} \\ \sigma^{\mu,\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.22}$$

In dieser Darstellung schreibt sich γ^5 dann

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}. \tag{A.23}$$

Für die Helizitätsamplituden benötigt man die Lösungen der Dirac-Gleichung:

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 0. \tag{A.24}$$

Verwendet man die chirale Darstellung und setzt ebene Wellen-Lösungen der Form $\Psi = \exp\{\mp \mathrm{i}kx\}\Psi_k^{(\pm)}$ ein, so erhält man ein Paar von Gleichungen (man beachte, daß das Superskript $(\pm)$ hier nicht wie in Anhang B die Helizitäten der Fermionen meint, sondern Lösungen positiver und negativer Frequenz unterscheidet):

$$K_{A\dot{B}} \psi_k^{(\pm),\dot{B}} = \pm m \phi_{k,A}^{(\pm)}, \qquad K^{\dot{A}B} \phi_{k,B}^{(\pm)} = \pm m \psi_k^{(\pm),\dot{A}}, \qquad k^2 = m^2. \tag{A.25}$$

Die Spinoren ψ und ϕ beziehen sich auf die Notation des Bispinors in (A.21). Die vier linear unabhängigen Lösungen der beiden Gleichungen (A.26) lauten dann:

$$\Psi_{k,1}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \kappa_{1,A} \\ \mp\kappa_2^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{k,2}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \pm\kappa_{2,A} \\ \kappa_1^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \tag{A.26}$$

Hierin unterscheidet das Superskript $(\pm)$ hinsichtlich des Vorzeichens der Frequenz der Lösung, während der Index $i = 1,2$ unten am Bispinor die jeweilige Lösung numeriert. Für die Bedeutung dieser Spinoren zur Beschreibung äußerer Fermionen- oder Antifermionenzustände sei auf Anhang B verwiesen. Die zugehörigen adjungierten Spinoren sind

$$\overline{\Psi}_{k,1}^{(\pm)} = \left(\mp\kappa_2^A, \kappa_{1,\dot{A}}\right), \qquad \overline{\Psi}_{k,2}^{(\pm)} = \left(\kappa_1^A, \pm\kappa_{2,\dot{A}}\right). \tag{A.27}$$

Die Lösungen der Dirac-Gleichung (A.26) sind dabei auf die übliche Weise normiert:

$$\Psi_{k,i}^{(\tau)\dagger}\Psi_{k,j}^{(\sigma)} = 2k^0\delta_{\sigma\tau}\delta_{ij}, \qquad \overline{\Psi}_{k,i}^{(\tau)}\Psi_{k,j}^{(\sigma)} = 2m\cdot(\operatorname{sgn}\tau)\delta_{\sigma\tau}\delta_{ij}, \tag{A.28}$$
$$\sigma,\tau = \pm, \qquad\qquad i,j = 1,2$$

A.4 Vektorbosonen

Hier sind noch einige nützliche Formeln für massive wie masselose Vektorbosonen zusammengetragen. Die Bewegungsgleichung für wechselwirkungsfreie Vektorbosonen ist die Proca-Gleichung im Falle $m \neq 0$:

$$\left[(\partial^2 + m^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu = 0, \tag{A.29}$$

die bei verschwindender Masse in die Maxwell-Gleichung übergeht:

$$\left[\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu = 0. \tag{A.30}$$

Aus diesen folgt in beiden Fällen die Bedingung, daß die Kontraktion der Polarisationsvektoren, die wiederum aus einem ebene Wellen-Ansatz $A_\mu = \exp\{\mp ikx\}\varepsilon_\mu$ zur Lösung der Bewegungsgleichung folgen, mit dem Impulsvektor verschwinden muß:

$$\varepsilon_\mu(k)\cdot k^\mu = \frac{1}{2}K^{\dot{A}B}\varepsilon_{\dot{A}B}(k) = 0. \tag{A.31}$$

Für beide Fälle, massiv wie masselos, gilt wieder eine Normierungs- und Orthogonalitätsbedingung hinsichtlich der verschiedenen Polarisationen:

$$(\varepsilon_i(k)\cdot\varepsilon_j^*(k)) = \frac{1}{2}\varepsilon_{i,\dot{A}B}(k)\varepsilon_j^{*\dot{A}B} = -\delta_{ij}, \qquad i,j = \pm\,,\ [0 \text{ für } m \neq 0] \tag{A.32}$$

Eine Basis von Polarisationsvektoren erhält man durch die folgende Wahl, in der über eine freie Phase so verfügt wurde, daß die Überführung in spinorielle Gestalt möglichst einfach wird:

$$\varepsilon_{\pm}^{\mu}(k) = \frac{e^{\mp i\phi}}{\sqrt{2}} \left(0, -\cos\theta\cos\phi \pm i\sin\phi, -\cos\theta\sin\phi \mp i\cos\phi, \sin\theta\right), \tag{A.33a}$$

$$\varepsilon_{0}^{\mu}(k) = \frac{k^0}{m} \left(\frac{|\vec{k}|}{k^0}, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta\right), \tag{A.33b}$$

wobei die Winkel gerade die Polarkoordinaten des räumlichen Impulsvektors darstellen. Diese Polarisationsvektoren haben, wenn man die longitudinale Komponente $\varepsilon_0(k)$ wegläßt, auch für Photonen und Gluonen, also masselose Vektorbosonen Gültigkeit. Die Polarisationsspinoren für ein- bzw. auslaufende Vektorbosonzustände finden sich in Anhang B; für sie gelten die vor allem für die Crossing-Symmetrie wichtigen Relationen

$$\varepsilon_{i,\dot{A}B}(k) = \varepsilon_{-i,B\dot{A}}(k) = \varepsilon^{*}_{-i,\dot{A}B}(k) = \varepsilon^{*}_{i,B\dot{A}}(k). \tag{A.34}$$

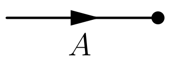
Anhang B

Feynmanregeln für Felder und Propagatoren

B.1 Ein- und auslaufende Felder

B.1.1 Einlaufende Felder

Fermion (Quark mit zusätzlichem Farbindex):

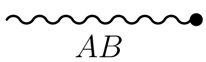


$$\begin{aligned} \Psi_+ &= \begin{pmatrix} \kappa_{1,A} \\ -\kappa_2^{\dot{A}} \end{pmatrix} \\ \Psi_- &= \begin{pmatrix} \kappa_{2,A} \\ \kappa_1^{\dot{A}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Antifermion (Antiquark mit zusätzlichem Farbindex):

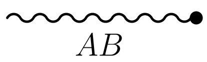
$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_+ &= \left(\kappa_1^A, -\kappa_{2,\dot{A}}\right) \\ \overline{\Psi}_- &= \left(\kappa_2^A, \kappa_{1,\dot{A}}\right) \end{aligned} \tag{B.2}$$

Photon (Gluon mit zusätzlichem Farbindex):



$$\begin{aligned} \varepsilon_{+,\dot{A}B}(k) &= \frac{\sqrt{2}\, g_{+,\dot{A}} k_B}{\langle g_+ k\rangle^*} \\ \varepsilon_{-,\dot{A}B}(k) &= \frac{\sqrt{2}\, k_{\dot{A}} g_{-,B}}{\langle g_- k\rangle} \end{aligned} \tag{B.3}$$

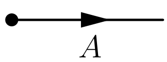
Massives Vektorboson:



$$\begin{aligned}\varepsilon_{+,\dot{A}B}(k) &= \sqrt{2} n_{2,\dot{A}} n_{1,B} \\ \varepsilon_{-,\dot{A}B}(k) &= \sqrt{2} n_{1,\dot{A}} n_{2,B} \\ \varepsilon_{0,\dot{A}B}(k) &= \tfrac{1}{m}\left(\kappa_{1,\dot{A}}\kappa_{1,B} - \kappa_{2,\dot{A}}\kappa_{2,B}\right)\end{aligned} \tag{B.4}$$

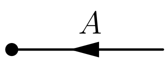
B.1.2 Auslaufende Felder

Fermion (Quark mit zusätzlichem Farbindex):



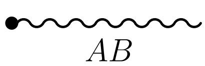
$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_+ &= \left(-\kappa_2^A, \kappa_{1,\dot{A}}\right) \\ \overline{\Psi}_- &= \left(\kappa_1^A, \kappa_{2,\dot{A}}\right)\end{aligned} \tag{B.5}$$

Antifermion (Antiquark mit zusätzlichem Farbindex):



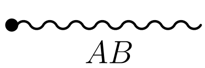
$$\begin{aligned}\Psi_+ &= \begin{pmatrix} -\kappa_{2,A} \\ \kappa_1^{\dot{A}} \end{pmatrix} \\ \Psi_- &= \begin{pmatrix} \kappa_{1,A} \\ \kappa_2^{\dot{A}} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{B.6}$$

Photon (Gluon mit zusätzlichem Farbindex):



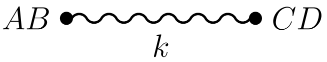
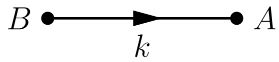
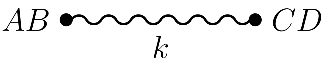
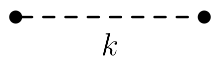
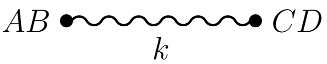
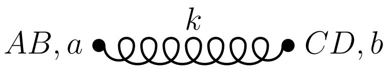
$$\begin{aligned}\varepsilon^*_{+,\dot{A}B}(k) &= \tfrac{\sqrt{2}\, k_{\dot{A}} g_{+,B}}{\langle g_+ k\rangle} \\ \varepsilon^*_{-,\dot{A}B}(k) &= \tfrac{\sqrt{2}\, g_{-,\dot{A}} k_B}{\langle g_- k\rangle^*}\end{aligned} \tag{B.7}$$

Massives Vektorboson:

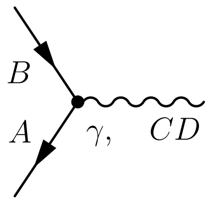


$$\begin{aligned}\varepsilon^*_{+,\dot{A}B}(k) &= \sqrt{2} n_{1,\dot{A}} n_{2,B} \\ \varepsilon^*_{-,\dot{A}B}(k) &= \sqrt{2} n_{2,\dot{A}} n_{1,B} \\ \varepsilon^*_{0,\dot{A}B}(k) &= \tfrac{1}{m}\left(\kappa_{1,\dot{A}}\kappa_{1,B} - \kappa_{2,\dot{A}}\kappa_{2,B}\right)\end{aligned} \tag{B.8}$$

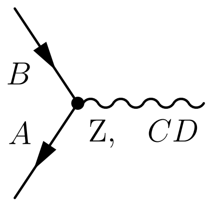
B.2 Propagatoren

 Photon: $\frac{-2\mathrm{i}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}}{k^2}$	 Fermion: $\frac{\mathrm{i}}{k^2-m_f^2}\begin{pmatrix} m_f\delta_A^B & K_{A\dot{B}} \\ K^{\dot{A}B} & m_f\delta^{\dot{A}}_{\dot{B}} \end{pmatrix}$
 W-Boson: $\frac{-2\mathrm{i}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}}{k^2-M_W^2}$	 Higgs-Boson: $\frac{\mathrm{i}}{k^2-M_H^2}$
 Z-Boson: $\frac{-2\mathrm{i}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}}{k^2-M_Z^2}$	 Gluon: $\frac{-2\mathrm{i}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}\delta_{ab}}{k^2}$

B.3 Vertizes

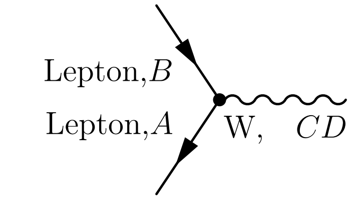


$$\mathrm{i}eQ_f\begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{C}}_{\dot{B}}\delta^D_A \\ \epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD} & 0 \end{pmatrix} \tag{B.9}$$



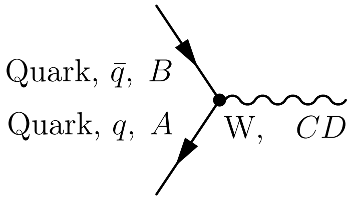
$$-\mathrm{i}e\begin{pmatrix} 0 & K_-\delta^{\dot{C}}_{\dot{B}}\delta^D_A \\ K_+\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD} & 0 \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

$$K_+ = -Q_f\frac{s_W}{c_W},$$
$$K_- = -Q_f\frac{s_W}{c_W} + \frac{I_{W,f}}{s_W c_W}$$



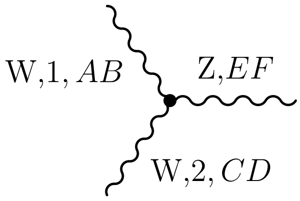
$$\frac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{C}}_{\dot{B}}\delta^{D}_{A} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.11}$$

$$e = g\sin\theta_W$$

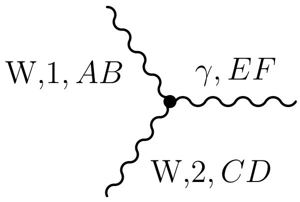


$$\frac{\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}V_{q\bar{q}}\begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{C}}_{\dot{B}}\delta^{D}_{A} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

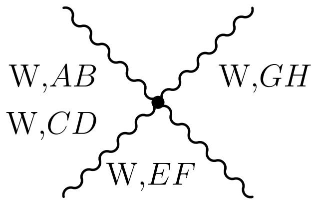
$V_{q\bar{q}}$: Element der CKM-Matrix



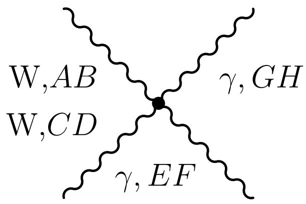
$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{i}g\cos\theta_W}{4}\Big[&\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD}(K_1-K_2)^{\dot{E}F}\\ &+\epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\epsilon^{DF}(K_2-K_Z)^{\dot{A}B}\\ &+\epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{BF}(K_Z-K_1)^{\dot{C}D}\Big]\end{aligned} \tag{B.13}$$



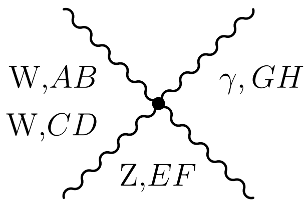
$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{i}e}{4}\Big[&\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD}(K_1-K_2)^{\dot{E}F}\\ &+\epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\epsilon^{DF}(K_2-K_\gamma)^{\dot{A}B}\\ &+\epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{BF}(K_\gamma-K_1)^{\dot{C}D}\Big]\end{aligned} \tag{B.14}$$



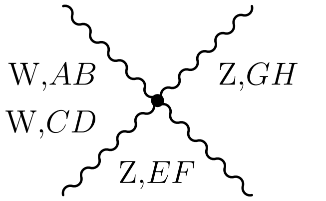
$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{i}g^2}{4}\Big[&2\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD}\epsilon^{\dot{E}\dot{G}}\epsilon^{FH}\\ &-\epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{BF}\epsilon^{\dot{C}\dot{G}}\epsilon^{DH}\\ &-\epsilon^{\dot{A}\dot{G}}\epsilon^{BH}\epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\epsilon^{DF}\Big]\end{aligned} \tag{B.15}$$



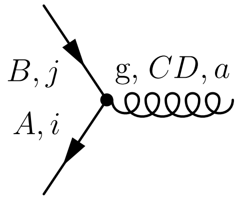
$$\begin{aligned}-\tfrac{\mathrm{i}e^2}{4}\Big[&2\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD}\epsilon^{\dot{E}\dot{G}}\epsilon^{FH}\\ &-\epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{BF}\epsilon^{\dot{C}\dot{G}}\epsilon^{DH}\\ &-\epsilon^{\dot{A}\dot{G}}\epsilon^{BH}\epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\epsilon^{DF}\Big]\end{aligned} \tag{B.16}$$



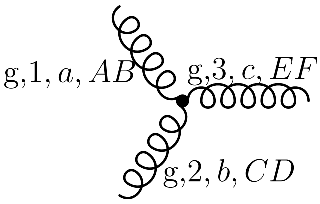
$$\begin{aligned}-\tfrac{\mathrm{i}eg\cos\theta_W}{4}\Big[&2\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BD}\epsilon^{\dot{E}\dot{G}}\epsilon^{FH}\\ &-\epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{BF}\epsilon^{\dot{C}\dot{G}}\epsilon^{DH}\\ &-\epsilon^{\dot{A}\dot{G}}\epsilon^{BH}\epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\epsilon^{DF}\Big]\end{aligned} \tag{B.17}$$



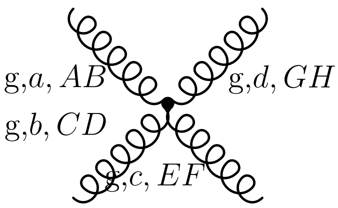
$$-\frac{\mathrm{i}g^2\cos^2\theta_W}{4}\Big[2\epsilon^{\dot A\dot C}\epsilon^{BD}\epsilon^{\dot E\dot G}\epsilon^{FH} - \epsilon^{\dot A\dot E}\epsilon^{BF}\epsilon^{\dot C\dot G}\epsilon^{DH} - \epsilon^{\dot A\dot G}\epsilon^{BH}\epsilon^{\dot C\dot E}\epsilon^{DF}\Big] \tag{B.18}$$



$$\mathrm{i}g_s T^a_{ij}\begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot C}_{\dot B}\delta^D_A \\ \epsilon^{\dot A\dot C}\epsilon^{BD} & 0 \end{pmatrix} \tag{B.19}$$



$$-\frac{g_s}{4}f^{abc}\Big[\epsilon^{\dot A\dot C}\epsilon^{BD}(K_1-K_2)^{\dot E F} + \epsilon^{\dot C\dot E}\epsilon^{DF}(K_2-K_3)^{\dot A B} + \epsilon^{\dot A\dot E}\epsilon^{BF}(K_3-K_1)^{\dot C D}\Big] \tag{B.20}$$

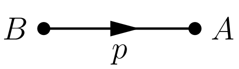


$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{i}g_s^2}{4}\Big[&f^{gab}f^{gbd}\big(\epsilon^{\dot A\dot E}\epsilon^{BF}\epsilon^{\dot C\dot G}\epsilon^{DH} - \epsilon^{\dot A\dot G}\epsilon^{BH}\epsilon^{\dot C\dot E}\epsilon^{DF}\big)\\ &+f^{gac}f^{gbd}\big(\epsilon^{\dot A\dot C}\epsilon^{BD}\epsilon^{\dot E\dot G}\epsilon^{FH} - \epsilon^{\dot A\dot G}\epsilon^{BH}\epsilon^{\dot C\dot E}\epsilon^{DF}\big)\\ &+f^{gbc}f^{gad}\big(\epsilon^{\dot A\dot C}\epsilon^{BD}\epsilon^{\dot E\dot G}\epsilon^{FH} - \epsilon^{\dot A\dot E}\epsilon^{BF}\epsilon^{\dot C\dot G}\epsilon^{DH}\big)\Big]\end{aligned} \tag{B.21}$$

Anhang C

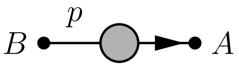
Graphische Regeln der massengenäherten Amplituden

Im folgenden bezeichne der Fermion-Propagator stets den masselosen Propagator, also:



$$= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_f^2} \begin{pmatrix} 0 & P_{A\dot{B}} \\ P^{\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

Äußere Fermionen- und Vektorbosonen-Zustände werden an dieser Stelle nicht benötigt, die graphischen Regeln betreffen lediglich die Struktur der Fermionenlinien in der Massennäherung. Dazu ist es angebracht, einen „massiven“ Propagator einzuführen, der mittels eines Blob von dem üblichen unterschieden wird. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden ist, daß der masselose Propagator querdiagonal ist, während der „geblobbte“ Diagonalstruktur aufweist. Dies hat zur Konsequenz, daß der masselose Propagator chiralitätserhaltend ist (wie der masselose Grenzfall), während der „massive“ Propagator wegen seiner Diagonalgestalt die Chiralitäten vertauscht, also chiralitätsverletzend ist. Der massentragende Propagator sieht dabei wie folgt aus:



$$= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_f^2} \begin{pmatrix} \delta_A^B & 0 \\ 0 & \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

Es findet also eine Aufspaltung des voll massiven Propagators (bzgl. seiner Matrixstruktur) in die beiden Summanden (C.1) und (C.2) statt entsprechend der Form des Zählers der Fermionenpropagatoren $\not{p} + m_f \cdot \mathbf{1}$.

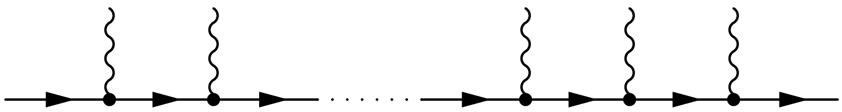
Die hier aufgeführten graphischen Regeln für die Massenkorrekturen entsprechen der in Abschnitt 4.3 gegebenen Deutung der Massenentwicklung als einer Zerlegung des massiven Prozesses in eine Summe von vier masselosen Prozessen (für jede Fermionenlinie). Wichtig ist dabei die Strukturierung des gesamten Einschubes der Fermionenlinie zwischen den äußeren Dirac-Spinoren, die wie üblich (s. (4.8)) so aussieht (ohne Vorfaktor $\mathcal{P}(n)$):

$$\begin{pmatrix} m_f \epsilon^{B_n D_n} \delta_{A_1}^{D_1} \mathbf{A}(n) & \delta_{\dot{B}_n}^{\dot{C}_n} \delta_{A_1}^{D_1} (\mathbf{B}'(n) + m_f^2 \mathbf{E}(n)) \\ \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \epsilon^{B_n D_n} (\mathbf{C}'(n) + m_f^2 \mathbf{F}(n)) & m_f \epsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1} \delta_{\dot{B}_n}^{\dot{C}_n} \mathbf{D}(n) \end{pmatrix} \quad . \tag{C.3}$$

Die allgemeine massengenäherte Amplitude läßt sich dann gemäß Kapitel 3 in der folgenden Weise in graphische Regeln fassen, wobei alle möglichen Einsetzungen von nur einem „massiven“ Propagator sowie alle kombinatorischen Möglichkeiten, zwei „massive“ Propagatoren in die Amplitude einzusetzen, berücksichtigt werden müssen. Die voll massive Fermionenlinie wird damit in diese Summe aus masselosen Propagatoren und „Massentermen“ aufgespalten:

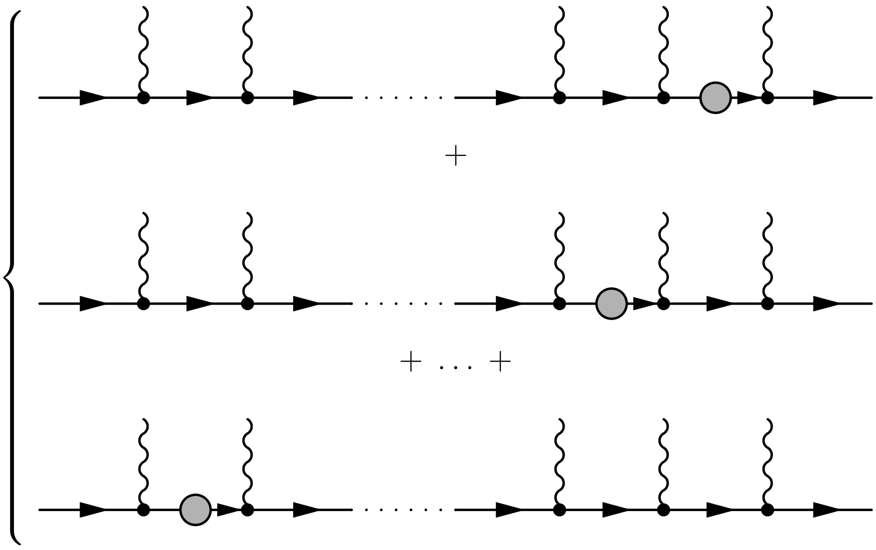
$$\mathcal{M}_{\text{massiv}} = \mathcal{A}_0 \cdot \mathbf{1} + \mathcal{A}_1 \cdot m_f + \mathcal{A}_2 \cdot m_f^2 + \mathcal{O}(m_f^3) \tag{C.4}$$

$\mathcal{A}_0 =$



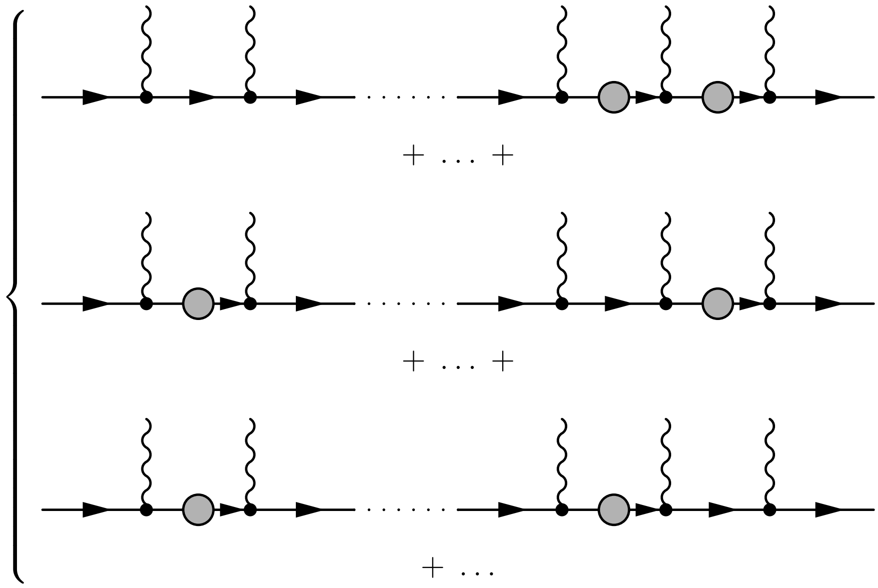
(C.5)

$\mathcal{A}_1 =$



(C.6)

$$\mathcal{A}_2 =$$



(C.7)

Die Summe endet, wenn man zwei „massive“ Propagatoren an Stelle der letzten beiden „masselosen“ Propagatoren gesetzt hat, während sonst überall die Propagatoren (C.1) stehen. Wichtig ist, daß die „massiven“ Propagatoren prinzipiell ununterscheidbar sind, d.h., daß keine Symmetriefaktoren in den Termen der quadratischen Ordnung auftreten, jede Kombination von zwei Masseneinsetzungen wird lediglich einfach gezählt. Einsetzungen von drei massiven Propagatoren brauchen nicht betrachtet zu werden, da sie dem expliziten Einbringen von dritten Potenzen der Fermionenmassen in die Amplitude entsprächen; diese Terme sind bereits von höherer Ordnung und werden in der Massenentwicklung nicht mitgenommen.

Offensichtlich erzeugt die allererste Linie in (C.4) (ohne Einsetzungen von „Massentermen“) die beiden Matrixelemente $\mathbf{B}(n)$ und $\mathbf{C}(n)$, die von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ sind. Das Einsetzen eines „Massenterms“ als Diagonalmatrix hat in (C.3) einen Eintrag auf der Hauptdiagonale zur Folge: Alle Linien in (C.4) mit einem „Massenterm“ aufsummiert ergeben die beiden Matrixelemente $\mathbf{A}(n)$ und $\mathbf{D}(n)$, die zur linearen Massenpotenz gehören, durch die Konvention, m_f herauszuziehen, aber ebenfalls $\mathcal{O}(1)$ sind. Es fehlen die Terme quadratisch in der Fermionenmasse, die natürlich durch die Linien mit zwei „Massentermen“ zustande kommen; die Aufsummation dieser Linien in (C.4) ergibt die beiden fehlenden Matrixelemente $\mathbf{E}(n)$ und $\mathbf{F}(n)$ in der Matrix (C.3). Die Striche an $\mathcal{B}(n)$ und $\mathcal{C}(n)$ durften weggelassen werden, da die Striche lediglich klären, ob in Abhängigkeit von den äußeren Fermionenzuständen zusätzliche Massenkorrekturen an den Impulsen aus den Propagatorzählern angebracht werden müssen; dies hat aber für die Gestalt der expliziten Massenterme, die aus den Propagatorzählern stammen, und für die Form der massengenäherten Fermionenlinie keine Relevanz.

Anhang D

Eigenschaften der massengenäherten Spinorprodukte

Zur numerischen Bestimmung von Matrixelementen und Wirkungsquerschnitten werden die folgenden Spinoren verwendet:

$$k_A = \begin{pmatrix} \dfrac{k^1 - \mathrm{i}k^2}{\sqrt{k^0 - k^3}} \\ \\ \sqrt{k^0 - k^3} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{k}_A = \frac{1}{2k_0} \begin{pmatrix} \sqrt{k^0 - k^3} \\ \\ \dfrac{-(k^1 + \mathrm{i}k^2)}{\sqrt{k^0 - k^3}} \end{pmatrix}. \tag{D.1}$$

Aufgrund der in Kapitel 3 durchgeführten Projektion der Massenschale auf den Lichtkegel entspricht dies gerade der spinoriellen Darstellung eines Vektors der Form

$$k^\mu = k^0 \left(1,\ \sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\phi\right)^T. \tag{D.2}$$

Mittels der trigonometrischen Identitäten

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\theta\right)}, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\theta\right)}, \tag{D.3}$$

sowie der Eulerschen Formel lassen sich diese Spinoren schnell in die übliche Schreibweise bringen.

$$k_A = \sqrt{2k_0} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\phi} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{k}_A = \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{+\mathrm{i}\phi} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{D.4}$$

Ein Spinorprodukt 1. Art ist ein solches zwischen Spinoren 1. Art und besitzt die Dimension Energie, ein Spinorprodukt 2. Art wird zwischen einem Spinor der jeweils 1. und 2. Art gebildet. Es ist dimensionslos. Aufgrund der folgenden Rechnung kann man ein Spinorprodukt der 3. Art, das dann zwei Spinoren der zweiten Art enthält, auf ein (komplex konjugiertes) Spinorprodukt der 1. Art zurückführen:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{p}\tilde{q}\rangle &= \frac{1}{2p^0 2q^0}\left(-\sqrt{\frac{p^0-p^3}{q^0-q^3}}(q^1+\mathrm{i}q^2)+\sqrt{\frac{q^0-q^3}{p^0-p^3}}(p^1+\mathrm{i}p^2)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2p^0 2q^0}}\left(-\frac{\sin\frac{\theta_p}{2}}{\sin\frac{\theta_q}{2}}e^{+\mathrm{i}\phi_q}\sin\frac{\theta_q}{2}\cos\frac{\theta_q}{2}+\frac{\sin\frac{\theta_q}{2}}{\sin\frac{\theta_p}{2}}e^{+\mathrm{i}\phi_p}\sin\frac{\theta_p}{2}\cos\frac{\theta_p}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2p^0 2q^0}\cdot\sqrt{2p^0 2q^0}\left(e^{\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta_p}{2}\sin\frac{\theta_q}{2}-e^{\mathrm{i}\phi_q}\cos\frac{\theta_q}{2}\sin\frac{\theta_p}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2p^0 2q^0}\cdot\langle pq\rangle^*
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Betrachtet man die Paritätstransformation, die den räumlichen Anteil eines Vierervektors einer Punktspiegelung am Ursprung unterzieht, also die Polarkoordinaten auf die folgende Weise transformiert: $\theta \mapsto \pi-\theta, \phi \mapsto \phi+\pi$, wodurch $\sin\frac{\theta}{2}$ und $\cos\frac{\theta}{2}$ ineinander übergehen, und definiert man den paritätstransformierten Spinor mittels $(\mathcal{P}p)_A$, dann kann man die folgenden Relationen zwischen Spinorprodukten 1. und 2. Art aufstellen (hierbei bezeichne $\theta \equiv \theta_p, \theta' \equiv \theta_q, \phi \equiv \phi_p, \phi' \equiv \phi_q$):

$$\begin{gathered}
\langle p\tilde{q}\rangle = -\tfrac{p^0}{q^0}\langle \tilde{p}q\rangle^*\,,\\
\langle \tilde{p}q\rangle = -\tfrac{1}{2p^0}e^{\mathrm{i}\phi}\langle(\mathcal{P}p)q\rangle = \tfrac{1}{2p^0}e^{-\mathrm{i}\phi'}\langle p(\mathcal{P}q)\rangle^*\,,\\
\langle p\tilde{q}\rangle = \tfrac{1}{2q^0}e^{-\mathrm{i}\phi}\langle(\mathcal{P}p)q\rangle^* = -\tfrac{1}{2q^0}e^{\mathrm{i}\phi'}\langle p(\mathcal{P}q)\rangle\,,
\end{gathered} \tag{D.6}$$

Anhang E

Spinor-Ausdrücke der Fermionenlinien

In diesem Anhang werden die Ausdrücke für die speziellen Amplituden der Massennäherung für die verschiedenen möglichen Terme gesammelt. Die Einsetzung $\mathcal{M}$ bedeutet dabei jeweils die in Kapitel 4, Gl. (4.8) hergeleitete Matrix des betrachteten Prozesses. Weiterhin wird hier die Nomenklatur aus Kapitel 4 benutzt, bzgl. der Größen $\mathbf{A}(n), \mathbf{B}(n), \mathbf{C}(n), \mathbf{C}'(n)$ usw. Man hat zu unterscheiden, welche Funktion die durchlaufende fermionische Linie besitzt, die stets als an äußere Quellen gekoppelt zu betrachten ist, d.h. niemals eine geschlossene, innere Linie ist.

Im weiteren werden hier wieder die folgenden Konventionen verwendet ($n_{1,A}$ und $n_{2,A}$ sind durch (3.2) gegeben).

(Exakte) Spinoren aus der Zerlegung der zeitartigen Impulsvektoren:

$$\kappa_{1,A} = \sqrt{p^0 + |\vec{p}|}\, n_{1,A}, \qquad \kappa_{2,A} = \sqrt{p^0 - |\vec{p}|}\, n_{2,A}. \tag{E.1}$$

Massengenäherte Spinoren:

$$p_A = \sqrt{2p^0}\, n_{1,A}, \qquad \tilde{p}_A = \frac{1}{\sqrt{2p^0}}\, n_{2,A}. \tag{E.2}$$

Entsprechende Formeln gelten für die gestrichenen Impulse. Ausführlichere Erläuterungen zu diesen Formeln finden sich im ersten Abschnitt des Kapitels 4 über Spinoren 1. und 2. Art sowie in Anhang D.

E.1 Fermionenlinie

$$
\begin{aligned}
(+\to+) \qquad & (-\kappa_2'^{A_1}, \kappa'_{1,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{FL,+\to+}\begin{pmatrix} \kappa_{1,B_n} \\ -\kappa_2^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)\Big[m_f^2 p^{D_n}\tilde{p}'^{D_1}\mathbf{A}(n) + \hat{p}'^{\dot{C}_1}\hat{p}^{D_n}\left(\mathbf{C}'(n) + m_f^2\mathbf{F}(n)\right) \\
&\qquad + m_f^2 p'^{\dot{C}_1}\tilde{p}^{\dot{C}_n}\mathbf{D}(n) + m_f^2\tilde{p}'^{D_1}\tilde{p}^{\dot{C}_n}\mathbf{B}(n)\Big] \\
(+\to-) \qquad & (\kappa_1'^{A_1}, \kappa'_{2,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{FL,+\to-}\begin{pmatrix} \kappa_{1,B_n} \\ -\kappa_2^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)\Big[-m_f p'^{D_1}p^{D_n}\mathbf{A}(n) - m_f p'^{D_1}\tilde{p}^{\dot{C}_n}\mathbf{B}(n) \\
&\qquad + m_f\tilde{p}'^{\dot{C}_1}p^{D_n}\mathbf{C}(n)\Big] \\
(-\to+) \qquad & (-\kappa_2'^{A_1}, \kappa'_{1,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{FL,-\to+}\begin{pmatrix} \kappa_{2,B_n} \\ \kappa_1^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)\Big[-m_f\tilde{p}'^{D_1}p^{\dot{C}_n}\mathbf{B}(n) + m_f p'^{\dot{C}_1}\tilde{p}^{D_n}\mathbf{C}(n) \\
&\qquad - m_f p'^{\dot{C}_1}p^{\dot{C}_n}\mathbf{D}(n)\Big] \\
(-\to-) \qquad & (\kappa_1'^{A_1}, \kappa'_{2,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{FL,-\to-}\begin{pmatrix} \kappa_{2,B_n} \\ \kappa_1^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)\Big[-m_f^2\tilde{p}^{D_n}p'^{D_1}\mathbf{A}(n) + \hat{p}'^{D_1}\hat{p}^{\dot{C}_n}\left(\mathbf{B}'(n) + m_f^2\mathbf{E}(n)\right) \\
&\qquad + m_f^2\tilde{p}'^{\dot{C}_1}\tilde{p}^{D_n}\mathbf{C}(n) - m_f^2\tilde{p}'^{\dot{C}_1}p^{\dot{C}_n}\mathbf{D}(n)\Big]
\end{aligned}
\tag{E.3}
$$

E.2 Antifermionenlinie

$$
\begin{aligned}
(+\to+) \qquad & (\kappa_1^{A_1}, -\kappa_{2,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{AFL,+\to+}\begin{pmatrix} -\kappa'_{2,B_n} \\ \kappa_1'^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)(-1)^{n-1}\Big[m_f^2 p^{D_1}\tilde{p}'^{D_n}\mathbf{A}(n) + \hat{p}'^{\dot{C}_n}\hat{p}^{D_1}\left(\mathbf{B}'(n) + \right. \\
&\qquad \left. m_f^2\mathbf{E}(n)\right) + m_f^2\tilde{p}^{\dot{C}_1}\tilde{p}'^{D_n}\mathbf{C}(n) + m_f^2\tilde{p}^{\dot{C}_1}p'^{\dot{C}_n}\mathbf{D}(n)\Big] \\
(+\to-) \qquad & (\kappa_1^{A_1}, -\kappa_{2,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{AFL,+\to-}\begin{pmatrix} \kappa'_{1,B_n} \\ \kappa_2'^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)(-1)^{n-1}\Big[-m_f p^{D_1}p'^{D_n}\mathbf{A}(n) + m_f p^{D_1}\tilde{p}'^{\dot{C}_n}\mathbf{B}(n) \\
&\qquad - m_f\tilde{p}^{\dot{C}_1}p'^{D_n}\mathbf{C}(n)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(- \to +) \qquad & (\kappa_2^{A_1}, \kappa_{1,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{AFL,-\to+} \begin{pmatrix} -\kappa'_{2,B_n} \\ \kappa_1'^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
= \ & \mathcal{P}(n)(-1)^{n-1} \Big[m_f \tilde{p}^{D_1} p'^{\dot{C}_n} \mathbf{B}(n) - m_f p^{\dot{C}_1} \tilde{p}'^{D_n} \mathbf{C}(n) \\
& -m_f p^{\dot{C}_1} p'^{\dot{C}_n} \mathbf{D}(n) \Big] \\
(- \to -) \qquad & (\kappa_2^{A_1}, \kappa_{1,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{AFL,-\to-} \begin{pmatrix} \kappa'_{1,B_n} \\ \kappa_2'^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
= \ & \mathcal{P}(n)(-1)^{n-1} \Big[-m_f^2 \tilde{p}^{D_1} p'^{D_n} \mathbf{A}(n) + m_f^2 \tilde{p}^{D_1} \tilde{p}'^{\dot{C}_n} \mathbf{B}(n) \\
& + \hat{p}^{\dot{C}_1} \hat{p}'^{D_n} \big(\mathbf{C}'(n) + m_f^2 \mathbf{F}(n) \big) - m_f^2 \tilde{p}'^{\dot{C}_n} p^{\dot{C}_1} \mathbf{D}(n) \Big]
\end{aligned} \tag{E.4}
$$

E.3 Paarvernichtung

$$
\begin{aligned}
(+ \to +) \qquad & (\kappa_1'^{A_1}, -\kappa'_{2,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{PV,+\to+} \begin{pmatrix} \kappa_{1,B_n} \\ -\kappa_2^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
= \ & \mathcal{P}(n) \Big[-m_f p'^{D_1} p^{D_n} \mathbf{A}(n) - m_f p'^{D_1} \tilde{p}^{\dot{C}_n} \mathbf{B}(n) \\
& -m_f \tilde{p}'^{\dot{C}_1} p^{D_n} \mathbf{C}(n) \Big] \\
(+ \to -) \qquad & (\kappa_1'^{A_1}, -\kappa'_{2,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{PV,+\to-} \begin{pmatrix} \kappa_{2,B_n} \\ \kappa_1^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
= \ & \mathcal{P}(n) \Big[-m_f^2 \tilde{p}^{D_n} p'^{D_1} \mathbf{A}(n) + \hat{p}'^{D_1} \hat{p}^{\dot{C}_n} \big(\mathbf{B}'(n) + m_f^2 \mathbf{E}(n) \big) \\
& -m_f^2 \tilde{p}'^{\dot{C}_1} \tilde{p}^{D_n} \mathbf{C}(n) + m_f^2 \tilde{p}'^{\dot{C}_1} p^{\dot{C}_n} \mathbf{D}(n) \Big] \\
(- \to +) \qquad & (\kappa_2'^{A_1}, \kappa'_{1,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{PV,-\to+} \begin{pmatrix} \kappa_{1,B_n} \\ -\kappa_2^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
= \ & \mathcal{P}(n) \Big[-m_f^2 \tilde{p}'^{D_1} p^{D_n} \mathbf{A}(n) - m_f^2 \tilde{p}'^{D_1} \tilde{p}^{\dot{C}_n} \mathbf{B}(n) \\
& + \hat{p}'^{\dot{C}_1} \hat{p}^{D_n} \big(\mathbf{C}'(n) + m_f^2 \mathbf{F}(n) \big) + m_f^2 p'^{\dot{C}_1} \tilde{p}^{\dot{C}_n} \mathbf{D}(n) \Big] \\
(- \to -) \qquad & (\kappa_2'^{A_1}, \kappa'_{1,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{PV,-\to-} \begin{pmatrix} \kappa_{2,B_n} \\ \kappa_1^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
= \ & \mathcal{P}(n) \Big[m_f \tilde{p}'^{D_1} p^{\dot{C}_n} \mathbf{B}(n) + m_f p'^{\dot{C}_1} p^{D_n} \mathbf{C}(n) \\
& -m_f p'^{\dot{C}_1} p^{\dot{C}_n} \mathbf{D}(n) \Big]
\end{aligned} \tag{E.5}
$$

E.4 Paarerzeugung

$$
\begin{aligned}
(+\to+) \qquad & (-\kappa_2^{A_1}, \kappa_{1,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{PE,+\to+}\begin{pmatrix} -\kappa'_{2,B_n} \\ \kappa_1'^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)\Big[-m_f \tilde{p}^{D_1} p'^{\dot{C}_n}\mathbf{B}(n) - m_f p^{\dot{C}_1}\tilde{p}'^{D_n}\mathbf{C}(n) \\
&\quad -m_f p^{\dot{C}_1} p'^{\dot{C}_n}\mathbf{D}(n)\Big] \\
(+\to-) \qquad & (\kappa_1^{A_1}, \kappa_{2,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{PE,+\to-}\begin{pmatrix} -\kappa'_{2,B_n} \\ \kappa_1'^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)\Big[m_f^2 p^{D_1}\tilde{p}'^{D_n}\mathbf{A}(n) + \hat{p}^{D_1}\hat{p}'^{\dot{C}_n}\big(\mathbf{B}'(n) + m_f^2\mathbf{E}(n)\big) \\
&\quad -m_f^2\tilde{p}^{\dot{C}_1}\tilde{p}'^{D_n}\mathbf{C}(n) - m_f^2\tilde{p}^{\dot{C}_1}p'^{\dot{C}_n}\mathbf{D}(n)\Big] \\
(-\to+) \qquad & (-\kappa_2^{A_1}, \kappa_{1,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{PE,-\to+}\begin{pmatrix} \kappa'_{1,B_n} \\ \kappa_2'^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)\Big[m_f^2\tilde{p}^{D_1}p'^{D_n}\mathbf{A}(n) - m_f^2\tilde{p}^{D_1}\tilde{p}'^{\dot{C}_n}\mathbf{B}(n) \\
&\quad +\hat{p}^{\dot{C}_1}\hat{p}'^{D_n}\big(\mathbf{C}'(n) + m_f^2\mathbf{F}(n)\big) - m_f^2 p^{\dot{C}_1}\tilde{p}'^{\dot{C}_n}\mathbf{D}(n)\Big] \\
(-\to-) \qquad & (\kappa_1^{A_1}, \kappa_{2,\dot{A}_1})\mathcal{M}_{PE,-\to-}\begin{pmatrix} \kappa'_{1,B_n} \\ \kappa_2'^{\dot{B}_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}(n)\Big[-m_f p^{D_1}p'^{D_n}\mathbf{A}(n) + m_f\tilde{p}'^{\dot{C}_n}p^{D_1}\mathbf{B}(n) \\
&\quad +m_f\tilde{p}^{\dot{C}_1}p'^{D_n}\mathbf{C}(n)\Big]
\end{aligned}
\tag{E.6}
$$

Anhang F

Beispiel einer massiven Fermionenlinie

Hier ist zur Verdeutlichung der Ausführungen in den Kapiteln 2 und 4 das Ergebnis einer Rechnung wiedergegeben, das den vollständigen Ausdruck der Matrix einer Fermionenlinie eines QED-Prozesses mit sechs Vertizes darstellt, geordnet nach den Potenzen der Fermionenmasse. Die Nomenklatur hier ist die gleiche wie in Abschnitt 2.1 (siehe besonders Abbildung 2.1). Aufgrund der Relationen (2.1) ist nur die Angabe der beiden folgenden Terme notwendig:

$$\mathcal{A}_{QED}(6) \equiv A_0 + A_2 \cdot m_f^2 + A_4 \cdot m_f^4, \tag{F.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} A_0 = {} & P_1^{D_2\dot{C}_1} P_2^{D_3\dot{C}_2} P_3^{D_4\dot{C}_3} P_4^{D_5\dot{C}_4} \epsilon^{\dot{C}_5\dot{C}_6} + P_1^{D_2\dot{C}_1} P_2^{D_3\dot{C}_2} P_4^{D_4\dot{C}_5} P_5^{D_5\dot{C}_6} \epsilon^{\dot{C}_3\dot{C}_4} + \\ & P_1^{D_2\dot{C}_1} P_3^{D_3\dot{C}_4} P_4^{D_4\dot{C}_5} P_5^{D_5\dot{C}_6} \epsilon^{\dot{C}_2\dot{C}_3} + P_1^{D_2\dot{C}_1} P_2^{D_3\dot{C}_2} P_3^{D_4\dot{C}_3} P_5^{D_5\dot{C}_6} \epsilon^{\dot{C}_4\dot{C}_5} + \\ & P_2^{D_2\dot{C}_3} P_3^{D_3\dot{C}_4} P_4^{D_4\dot{C}_5} P_5^{D_5\dot{C}_6} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \end{aligned} \tag{F.2}$$

$$\begin{aligned} A_2 = {} & P_1^{D_2\dot{C}_1} P_2^{D_3\dot{C}_2} \epsilon^{D_5 D_4} \epsilon^{\dot{C}_3\dot{C}_4} \epsilon^{\dot{C}_5\dot{C}_6} + P_1^{D_2\dot{C}_1} P_3^{D_3\dot{C}_4} \epsilon^{D_5 D_4} \epsilon^{\dot{C}_2\dot{C}_3} \epsilon^{\dot{C}_5\dot{C}_6} + \\ & P_1^{D_2\dot{C}_1} P_4^{D_5\dot{C}_4} \epsilon^{D_4 D_3} \epsilon^{\dot{C}_2\dot{C}_3} \epsilon^{\dot{C}_5\dot{C}_6} + P_1^{D_2\dot{C}_1} P_5^{D_5\dot{C}_6} \epsilon^{D_4 D_3} \epsilon^{\dot{C}_2\dot{C}_3} \epsilon^{\dot{C}_4\dot{C}_5} + \\ & P_2^{D_2\dot{C}_3} P_3^{D_3\dot{C}_4} \epsilon^{D_5 D_4} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_5\dot{C}_6} + P_2^{D_2\dot{C}_3} P_4^{D_5\dot{C}_4} \epsilon^{D_4 D_3} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_5\dot{C}_6} + \\ & P_2^{D_2\dot{C}_3} P_5^{D_5\dot{C}_6} \epsilon^{D_4 D_3} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_4\dot{C}_5} + P_3^{D_4\dot{C}_3} P_4^{D_5\dot{C}_4} \epsilon^{D_3 D_2} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_5\dot{C}_6} + \\ & P_3^{D_4\dot{C}_3} P_5^{D_5\dot{C}_6} \epsilon^{D_3 D_2} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_4\dot{C}_5} + P_4^{D_4\dot{C}_5} P_5^{D_5\dot{C}_6} \epsilon^{D_3 D_2} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_3\dot{C}_4} \end{aligned} \tag{F.3}$$

$$A_4 = \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_3\dot{C}_4} \epsilon^{\dot{C}_5\dot{C}_6} \epsilon^{D_5 D_4} \epsilon^{D_3 D_2}. \tag{F.4}$$

Das Matrixelement rechts oben lautet dagegen:

$$\mathcal{B}_{QED}(6) \equiv B_0 + B_2 \cdot m_f^2 + B_4 \cdot m_f^4 \tag{F.5}$$

$$B_0 = P_1^{D_2\dot{C}_1} P_2^{D_3\dot{C}_2} P_3^{D_4\dot{C}_3} P_4^{D_5\dot{C}_4} P_5^{D_6\dot{C}_5} \tag{F.6}$$

$$\begin{aligned} B_2 = {} & P_1^{D_2\dot{C}_1} P_2^{D_3\dot{C}_2} P_3^{D_4\dot{C}_3} \epsilon^{D_6D_5} \epsilon^{\dot{C}_4\dot{C}_5} + P_1^{D_2\dot{C}_1} P_2^{D_3\dot{C}_2} P_4^{D_4\dot{C}_5} \epsilon^{D_6D_5} \epsilon^{\dot{C}_3\dot{C}_4} + \\ & P_1^{D_2\dot{C}_1} P_2^{D_3\dot{C}_2} P_5^{D_6\dot{C}_5} \epsilon^{D_5D_4} \epsilon^{\dot{C}_3\dot{C}_4} + P_1^{D_2\dot{C}_1} P_3^{D_3\dot{C}_4} P_4^{D_4\dot{C}_5} \epsilon^{D_6D_5} \epsilon^{\dot{C}_2\dot{C}_3} + \\ & P_1^{D_2\dot{C}_1} P_3^{D_3\dot{C}_4} P_5^{D_6\dot{C}_5} \epsilon^{D_5D_4} \epsilon^{\dot{C}_2\dot{C}_3} + P_1^{D_2\dot{C}_1} P_4^{D_5\dot{C}_4} P_5^{D_6\dot{C}_5} \epsilon^{D_4D_3} \epsilon^{\dot{C}_2\dot{C}_3} + \\ & P_2^{D_2\dot{C}_3} P_3^{D_3\dot{C}_4} P_4^{D_4\dot{C}_5} \epsilon^{D_6D_5} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} + P_2^{D_2\dot{C}_3} P_4^{D_5\dot{C}_4} P_5^{D_6\dot{C}_5} \epsilon^{D_4D_3} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} + \\ & P_3^{D_4\dot{C}_3} P_4^{D_5\dot{C}_4} P_5^{D_6\dot{C}_5} \epsilon^{D_3D_2} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \end{aligned} \tag{F.7}$$

$$\begin{aligned} B_4 = {} & P_1^{D_2\dot{C}_1} \epsilon^{\dot{C}_2\dot{C}_3} \epsilon^{\dot{C}_4\dot{C}_5} \epsilon^{D_4D_3} \epsilon^{D_6D_5} + P_2^{D_2\dot{C}_3} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_4\dot{C}_5} \epsilon^{D_4D_3} \epsilon^{D_6D_5} + \\ & P_3^{D_4\dot{C}_3} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_4\dot{C}_5} \epsilon^{D_3D_2} \epsilon^{D_6D_5} + P_4^{D_4\dot{C}_5} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_3\dot{C}_4} \epsilon^{D_3D_2} \epsilon^{D_6D_5} + \\ & P_5^{D_6\dot{C}_5} \epsilon^{\dot{C}_1\dot{C}_2} \epsilon^{\dot{C}_3\dot{C}_4} \epsilon^{D_5D_4} \epsilon^{D_3D_2} \end{aligned} \tag{F.8}$$

Hier kann man direkt die für die Massennäherung in Abschnitt 4.2 benötigten Terme ablesen, wenn man statt der exakten Impulsspinoren für Fermionen auf der Massenschale die genäherten Ausdrücke, wie in Kapitel 4 besprochen, einsetzt. Zu identifizieren wären dann:

$$A_0 \longleftrightarrow \mathbf{A}(6) \tag{F.9}$$

$$B_0 \longleftrightarrow \mathbf{B}^{(\prime)}(6) \tag{F.10}$$

$$B_2 \longleftrightarrow \mathbf{E}(6) \tag{F.11}$$

Anhand der so bestimmten expliziten Ausdrücke kann man sich die in Kapitel 4 für den allgemeinen Fall gewonnenen Regeln bezüglich der Indizes der jeweiligen Impulse und der auftretenden Epsilon-Tensoren klarmachen und an diesem Beispiel überprüfen. Man muß aber aufpassen, da hier $P_i, i = 1, \ldots, 5$ den vollen Impuls der Propagatoren bezeichnet, während in Kapitel 4 mit P der Impuls des äußeren Fermions gemeint ist, und die Propagatorimpulse mittels Impulserhaltung durch die Impulse der äußeren Fermionen und Vektorbosonen ausgedrückt sind.

Literaturverzeichnis

[1] S. Dittmaier, hep-ph/9805445

[2] F.A. Berends/W. Giele, *Nucl. Phys.* **B294** (1987) 700

[3] S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, 1995)

[4] M.E. Peskin/D.V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995)

[5] R. Penrose/W. Rindler: *Spinor Calculus and Twistor Geometry* (Cambridge University Press, 1984)

[6] I. Benn/R. Tucker: *An Introduction to Spinors and Geometry* (Adam Hilger, 1988)

[7] R. Gastmans/T.T. Wu: *The Ubiquitous Photon* (Clarendon Press, 1990)

[8] S. Dittmaier, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität Würzburg, Juli 1993

[9] M. Goossens/F. Mittelbach/A. Samarin: *The LaTeX companion* (Addison-Wesley, 1994)

[10] M. Metcalf/J. Reid: *The F Programming Language* (Oxford University Press, 1996)

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Manakos und Dr. Ohl für die Aufnahme in die Arbeistgruppe und die Ermöglichung meiner Diplomarbeit danken. Sie waren stets bereit, mir bei physikalischen und programmiertechnischen Problemen zu helfen. Weiterhin bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit in der Arbeitsgruppe und die vielen interessanten physikalischen Diskussionen, vor allem mit Dr. Thorsten Ohl, Dr. Harald Anlauf, Dipl.-Phys. Heike Pieschel und David Ondreka. Auch meine Gymnasiallehrer in Physik und Mathematik seien erwähnt, denen es gelungen ist, mich von den Geisteswissenschaften zur Physik zu bekehren, sowie eine wahre Vorbereitung auf ein naturwissenschaftliches Studium zu leisten.

Schließlich gilt mein Dank meinen Eltern, die mich in all den Jahren in jeder Hinsicht unterstützt und mir mein Studium ermöglicht haben.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Darmstadt

(Jürgen Reuter)