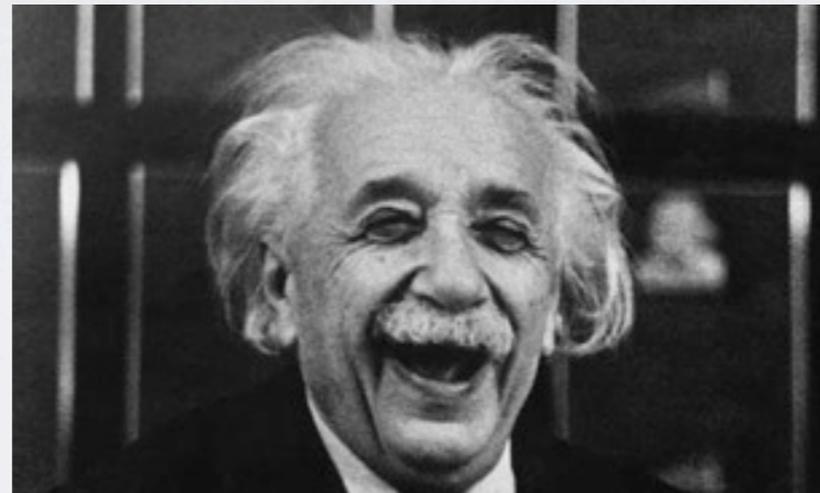


Warum findet mein Smartphone ohne Einstein seinen Weg nicht!?



Jürgen R. Reuter, DESY

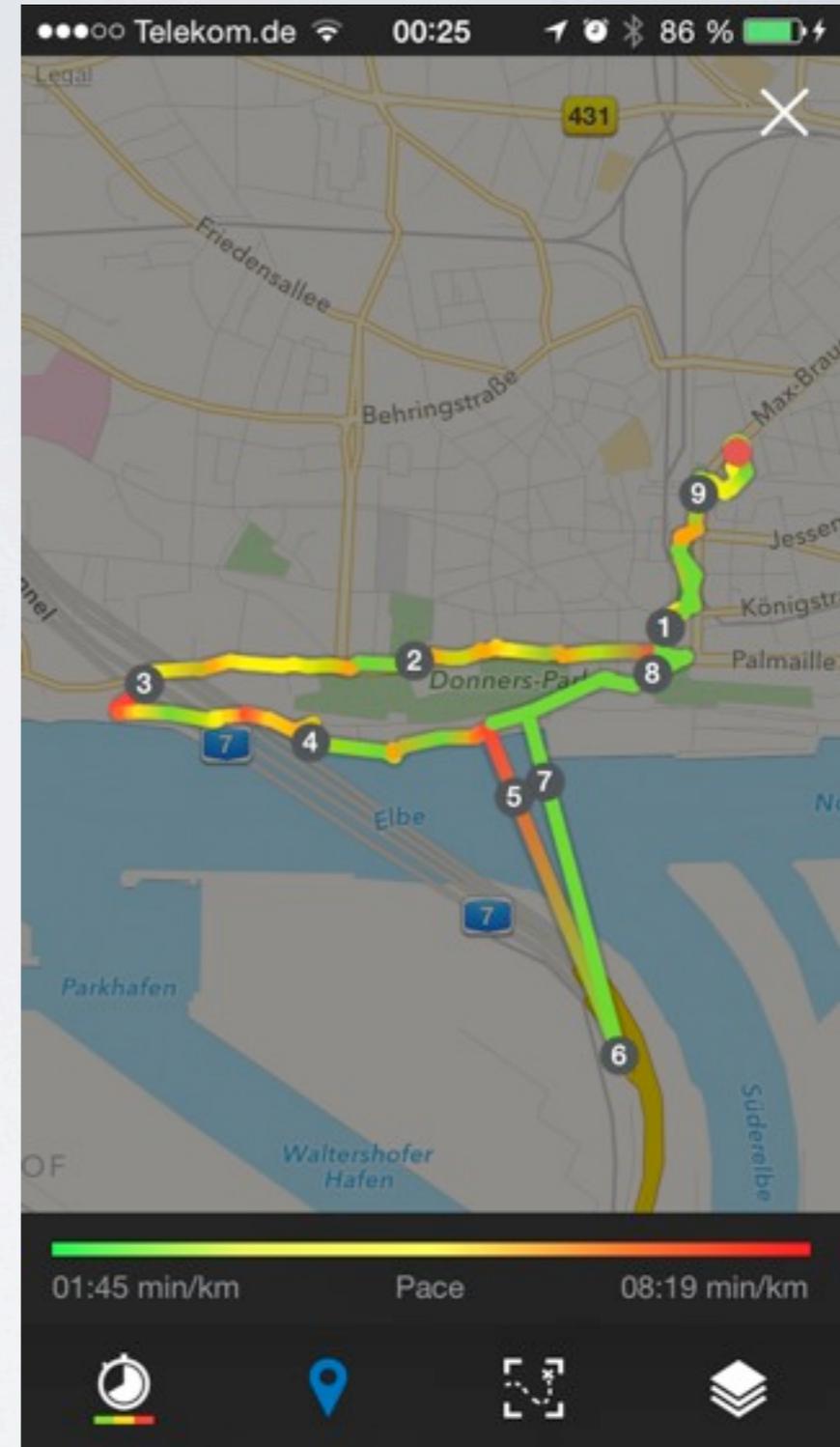


ALLTAG: (GPS-)NAVIGATION MIT IPHONE

- Smartphone enthält GPS-Empfänger
- Positionsbestimmung meist auf 10-30 m genau
- Was ist eigentlich GPS?
- Wie funktioniert das?
- Wie kann das so exakt sein?
- Wieso Einstein?

ALLTAG: (GPS-)NAVIGATION MIT IPHONE

- Smartphone enthält GPS-Empfänger
- Positionsbestimmung meist auf 10-30 m genau
- Was ist eigentlich GPS?
- Wie funktioniert das?
- Wie kann das so exakt sein?
- Wieso Einstein?



SATELLITEN-NAVIGATION



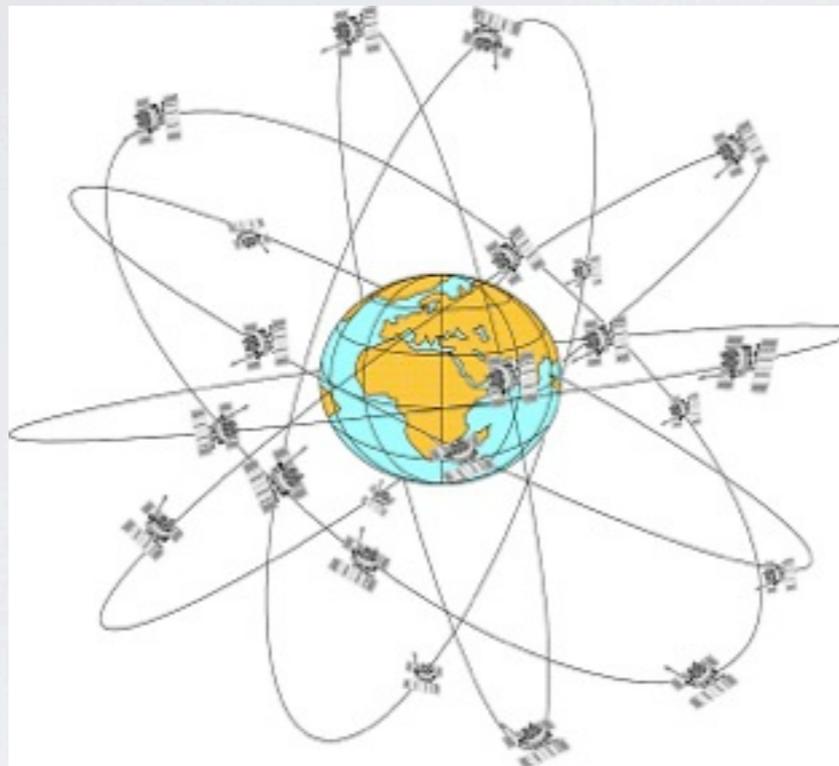
SATELLITEN-NAVIGATION

- 3(+1) funktionierende Systeme: GPS (1994), GLONASS (1995), Compass/Beidou (2010), Galilei (2020?)

SATELLITEN-NAVIGATION

- 3(+1) funktionierende Systeme: GPS (1994), GLONASS (1995), Compass/Beidou (2010), Galilei (2020?)
- **3 wesentliche Komponenten:**

★ **Space Segment** 20-30 Satelliten, 6 Ebenen



★ **Control Segment** Satelliten-Kontrollstationen, Update Bahndaten, Synchronisation der Satelliten-Uhren

★ **User Segment** GPS-Empfänger erhält Navigations- und Zeitdaten
⇒ Positions- und Zeitdaten auf der Erde





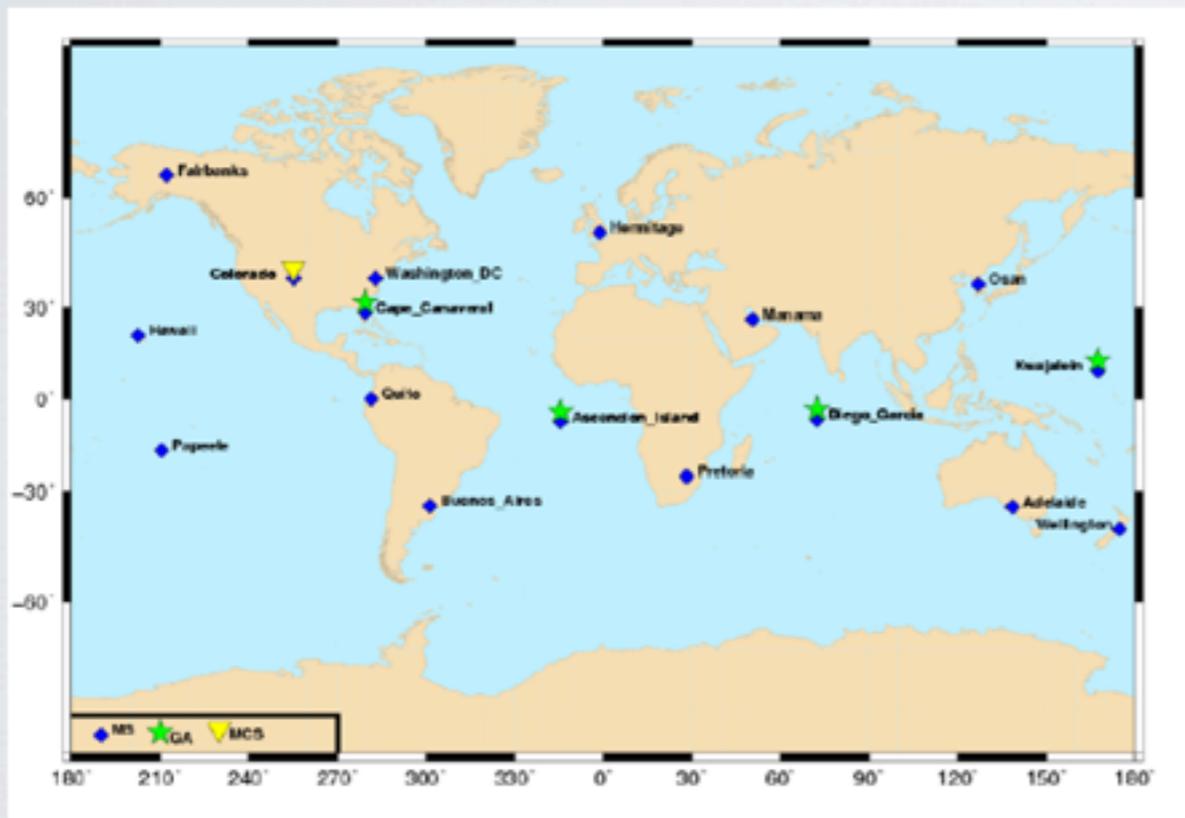
Ascension



Diego Garcia



Kwajalein



Schriever AFB, Colorado





Ascension



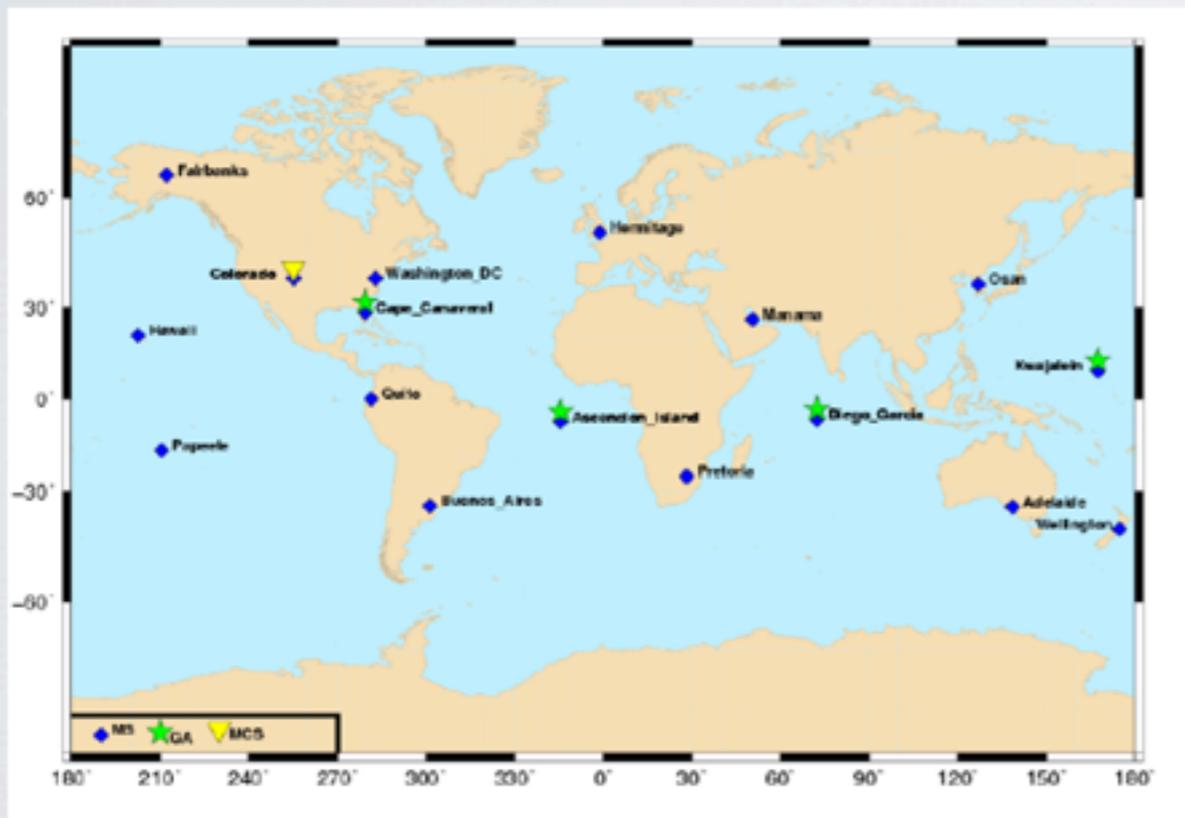
Diego Garcia



Kwajalein



12 new stations
2001-2006

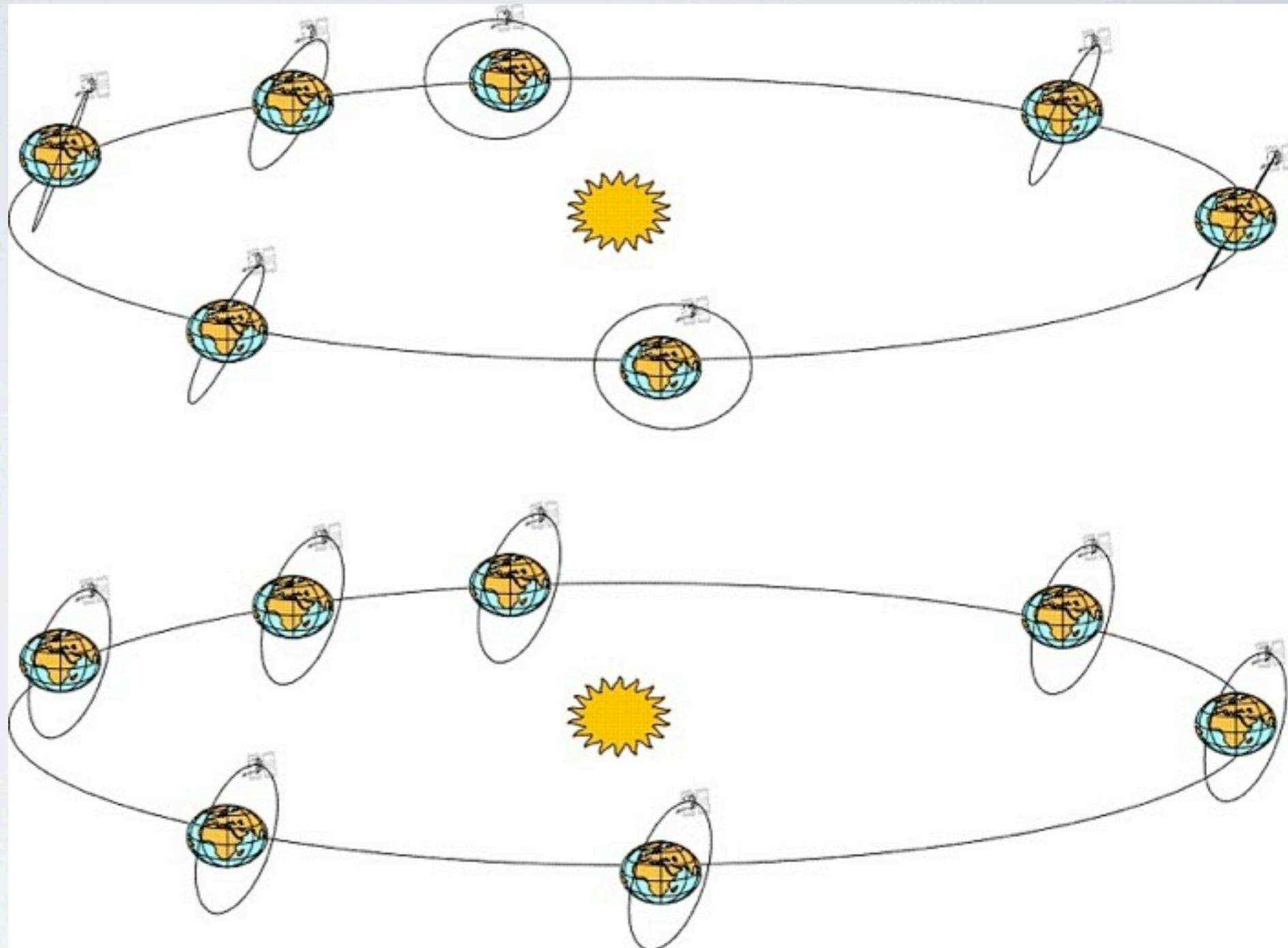


Schriever
AFB, Colorado



SATELLITEN-BAHN

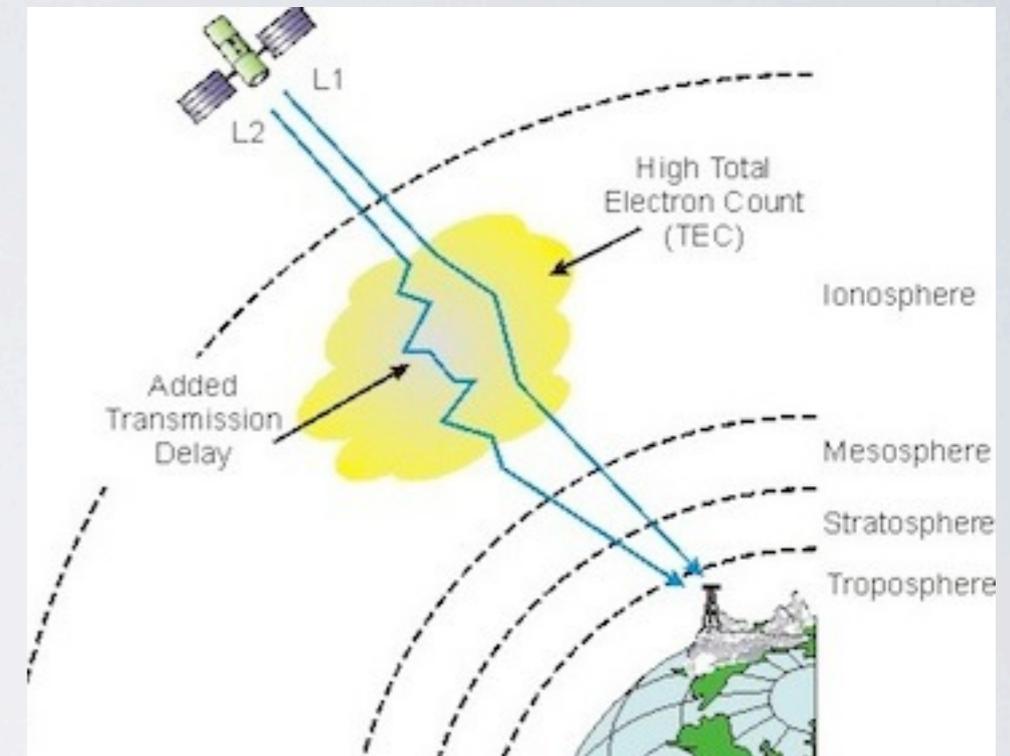
- ★ Umlaufzeit: 11 hrs 58 min
- ★ korrigiert Drehung der Erde um die Sonne
- ★ 4 min / Tag \times 365 Tage
 \Rightarrow Bahn bleibt fix zur Sonne
- ★ Nachteil: Resonanzen mit Erdgravitation
- ★ Neue Satelliten daher vermutlich 12 Stunden



SATELLITEN-KOMMUNIKATION

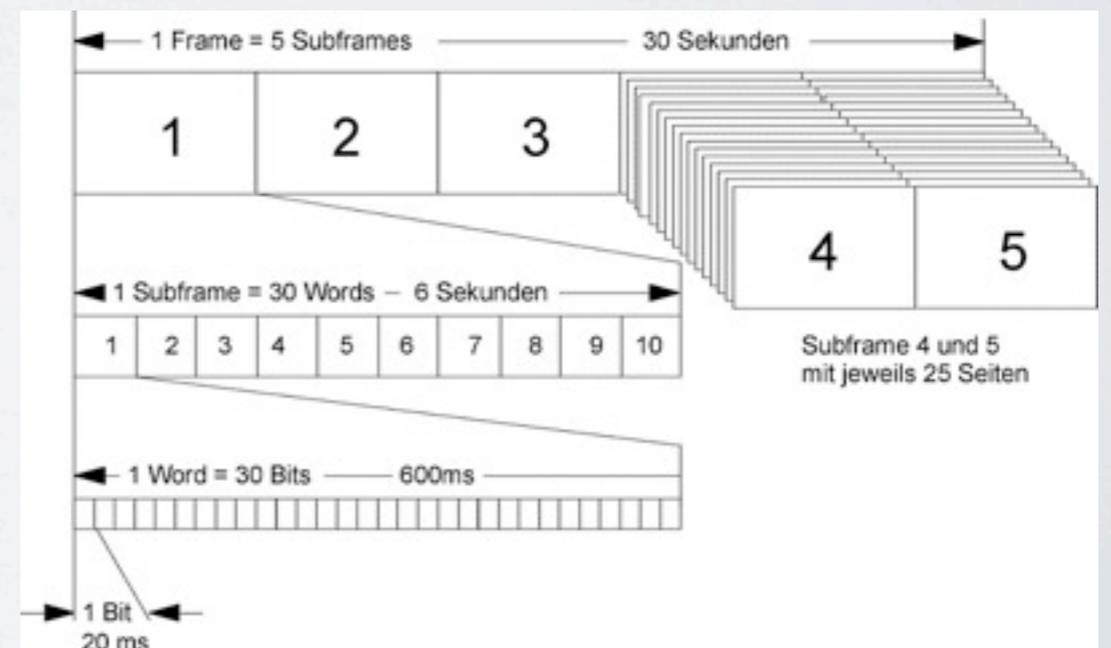
Satelliten senden Daten: 50 Hz-Rate, nur 1500 Bit pro Datensatz (!), auf 2 Frequenzen

1. Transmissionszeit von Satelliten-Atomuhren (!)
2. Momentanes Bahnsegment (“satellite ephemeris data”)
3. Satelliten-Uhr-Synchronisation (“clock offset”)
4. Bahndaten anderer Satelliten
5. Information zur Signalübertragung (Ionosphären-Effekt)
6. Kontrollinformation (“signal health status”)



2 Sendefrequenzen (Redundanz!)
1575,42 MHz (L1-Band), 1227,60 MHz (L2-Band)

2 Modulationen:
1,023 MHz (C/A-Band) und 10,23 MHz (P(Y)-Code)
C/A = Coarse Acquisition, P = Precise, Y → verschlüsselt



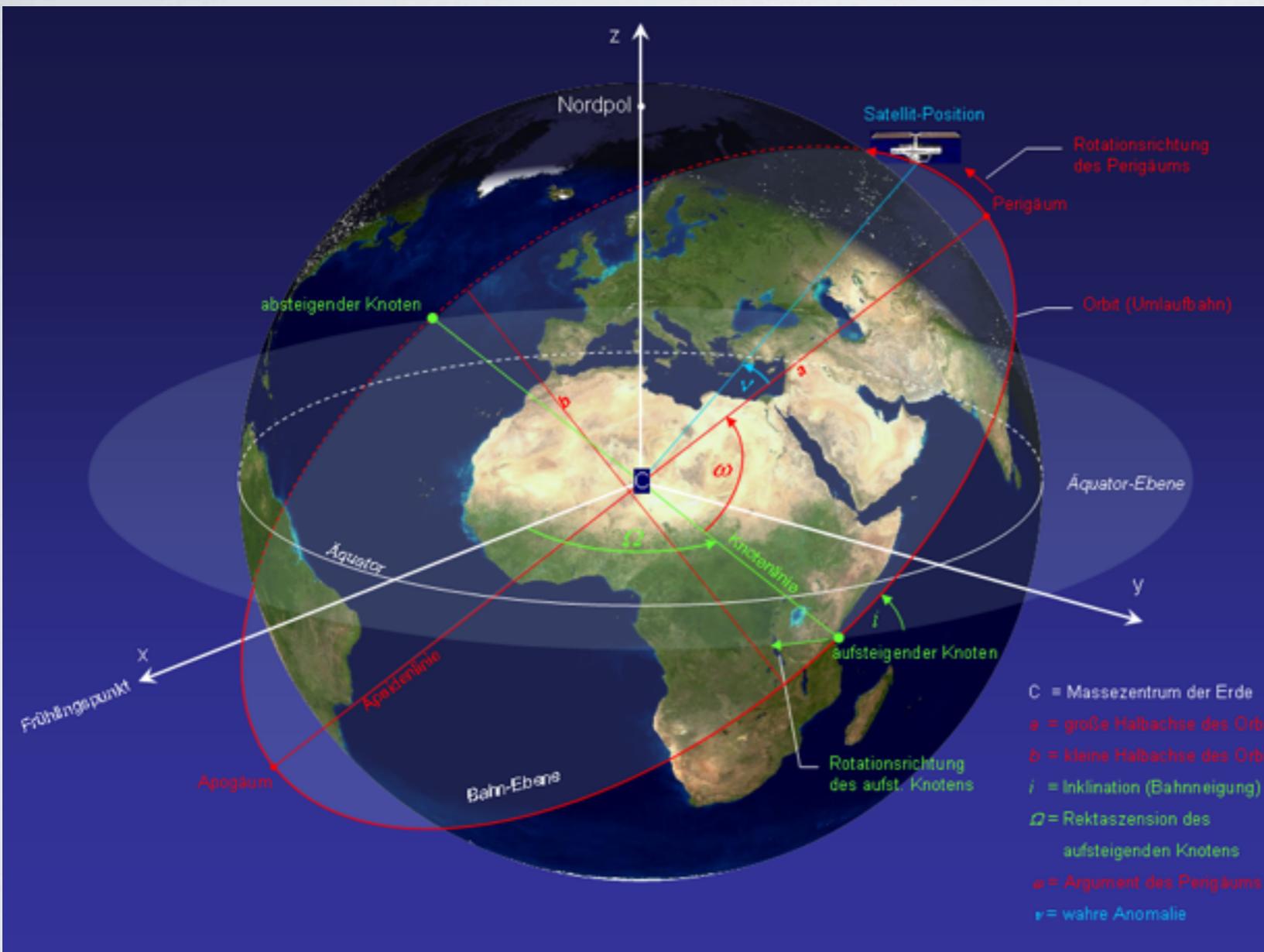
SATELLITEN-BAHNDATEN

Newton-Ellipse: 6 Parameter

- große Ellipsenhalbachse a
- Exzentrizität der Ellipse

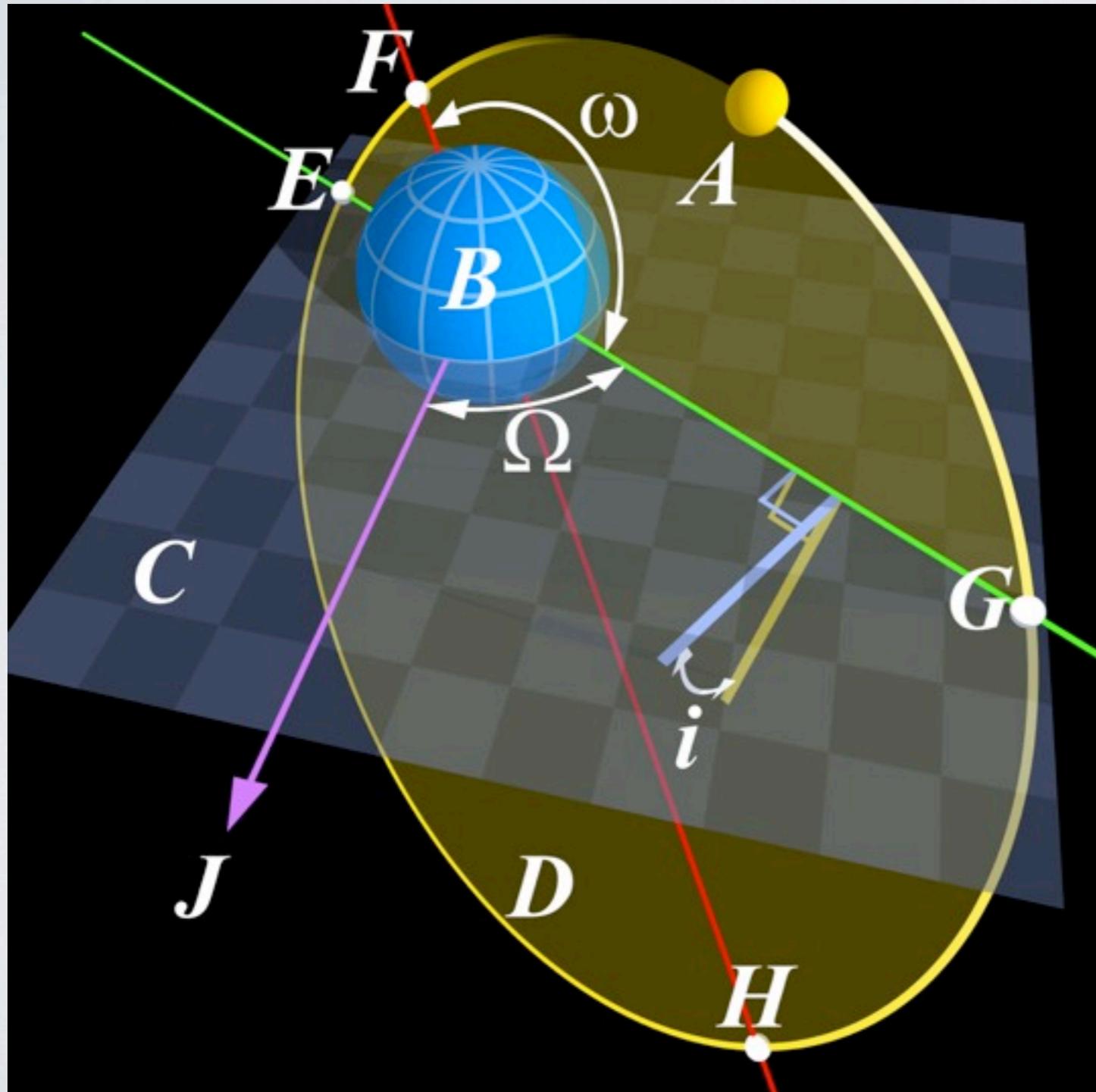
$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

- Periapsiswinkel ω
- Neigung (Inklination) i zur Äquatorebene
- Winkel zur Knotenlinie Ω
- wahre Anomalie zum Zeitnullpunkt v



SATELLITEN-BAHNDATEN

Newton-Ellipse: 6 Parameter



- große Ellipsenhalbachse a
- Exzentrizität der Ellipse

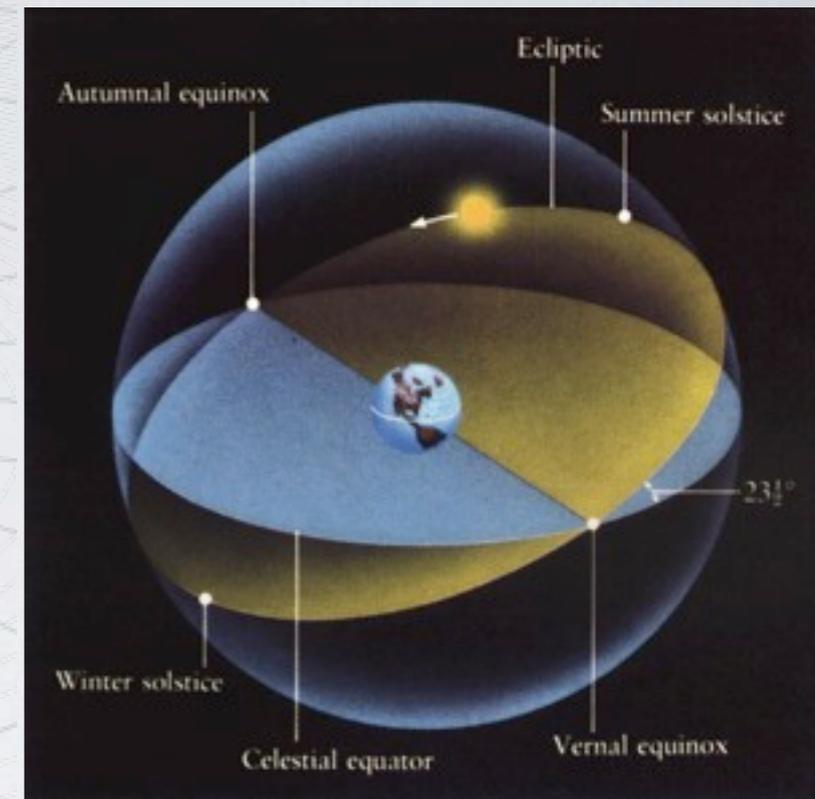
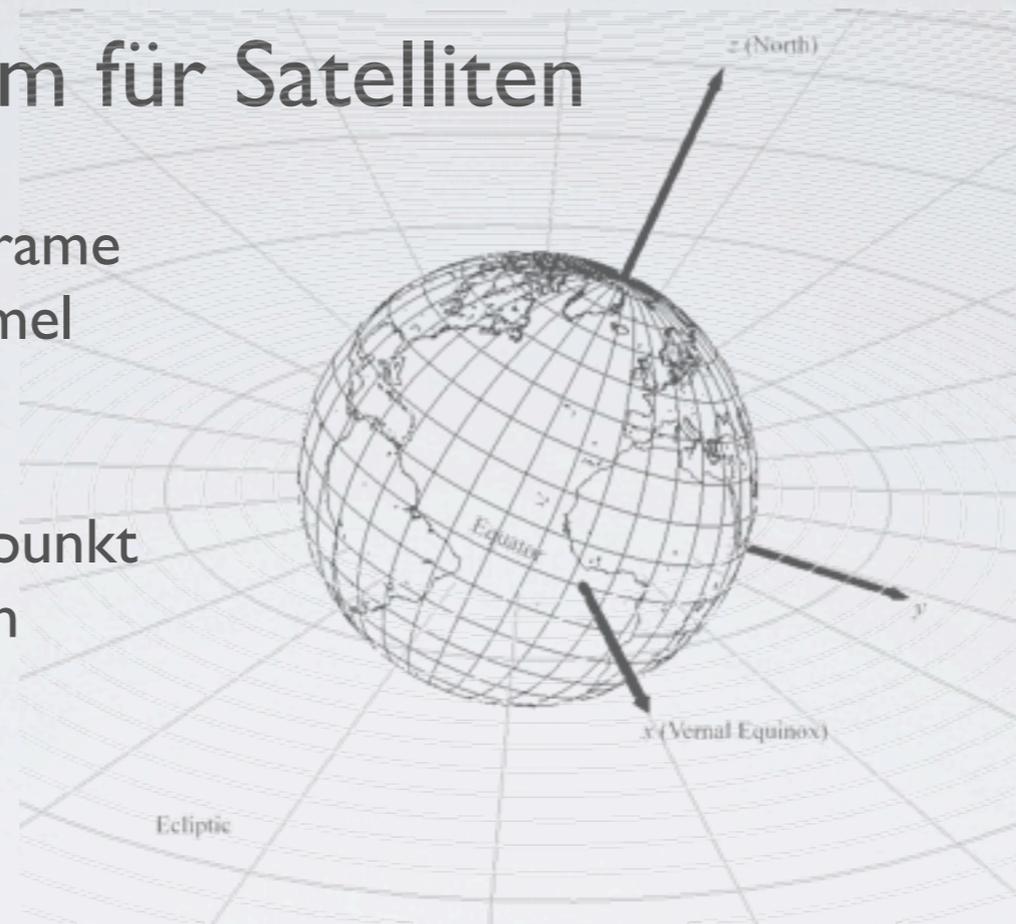
$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

- Periapsiswinkel ω
- Neigung (Inklination) i zur Äquatorebene
- Winkel zur Knotenlinie Ω
- wahre Anomalie zum Zeitnullpunkt v

KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

GPS-Koordinatensystem für Satelliten

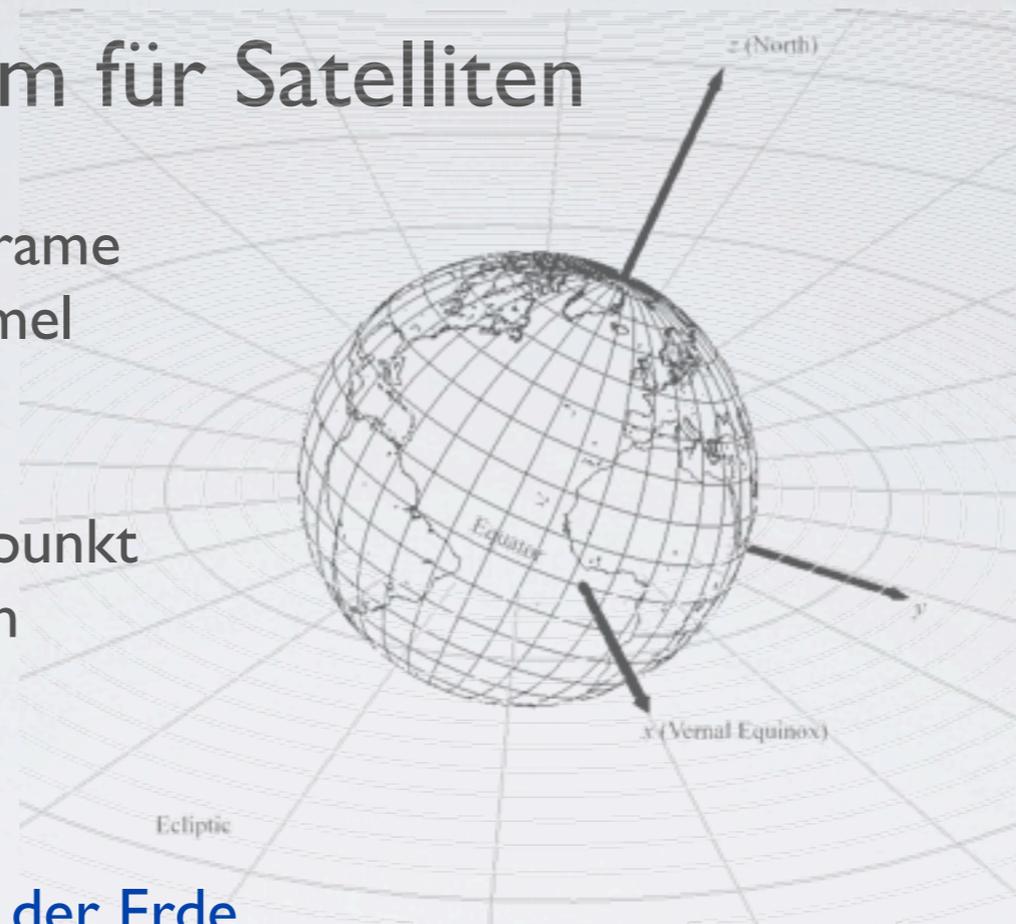
- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)



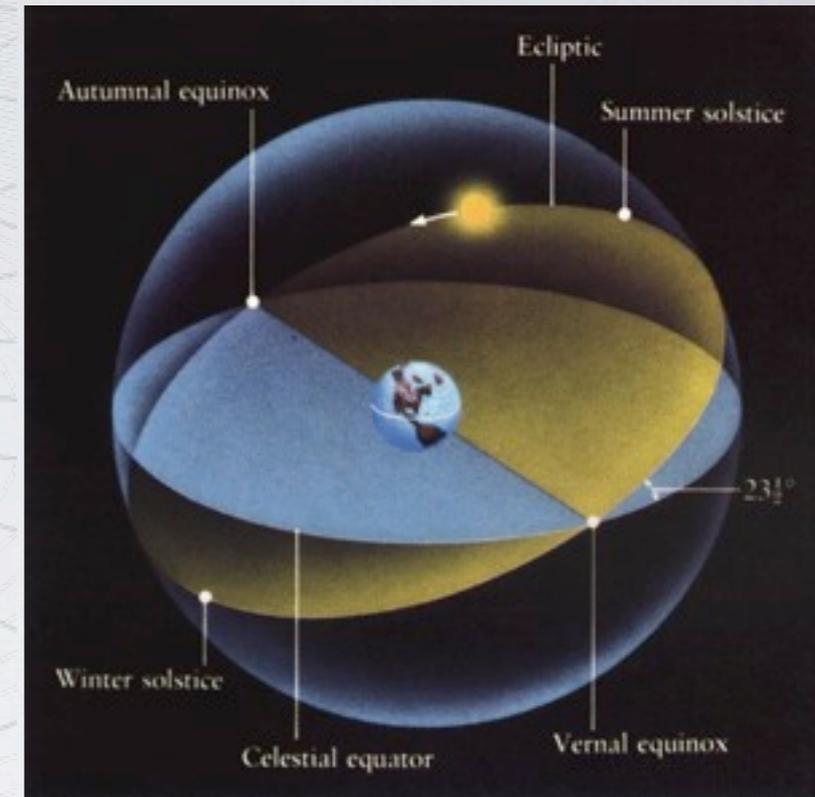
KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

GPS-Koordinatensystem für Satelliten

- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)



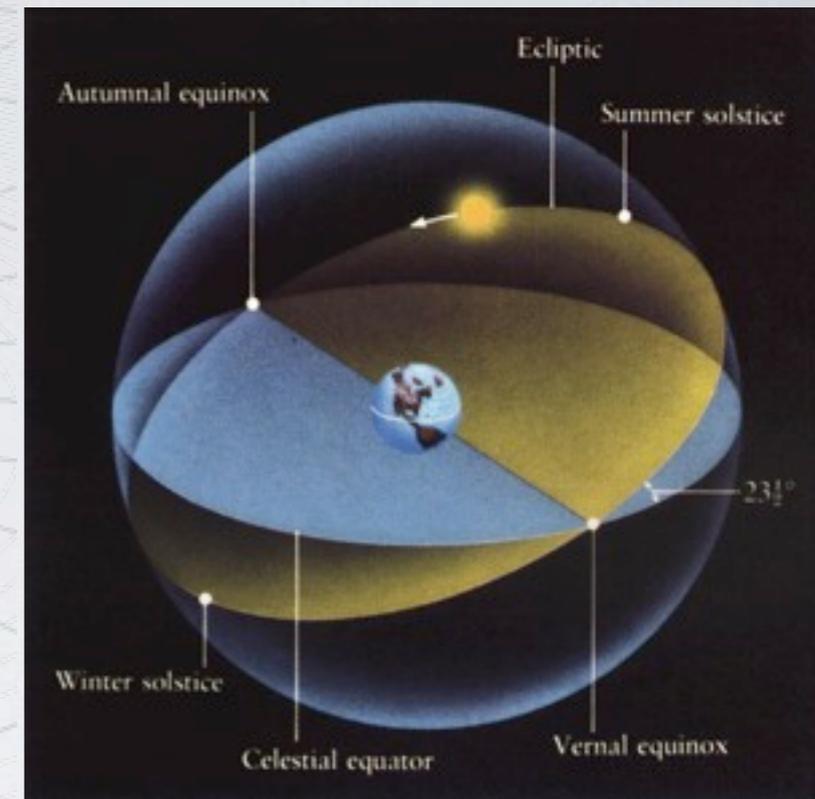
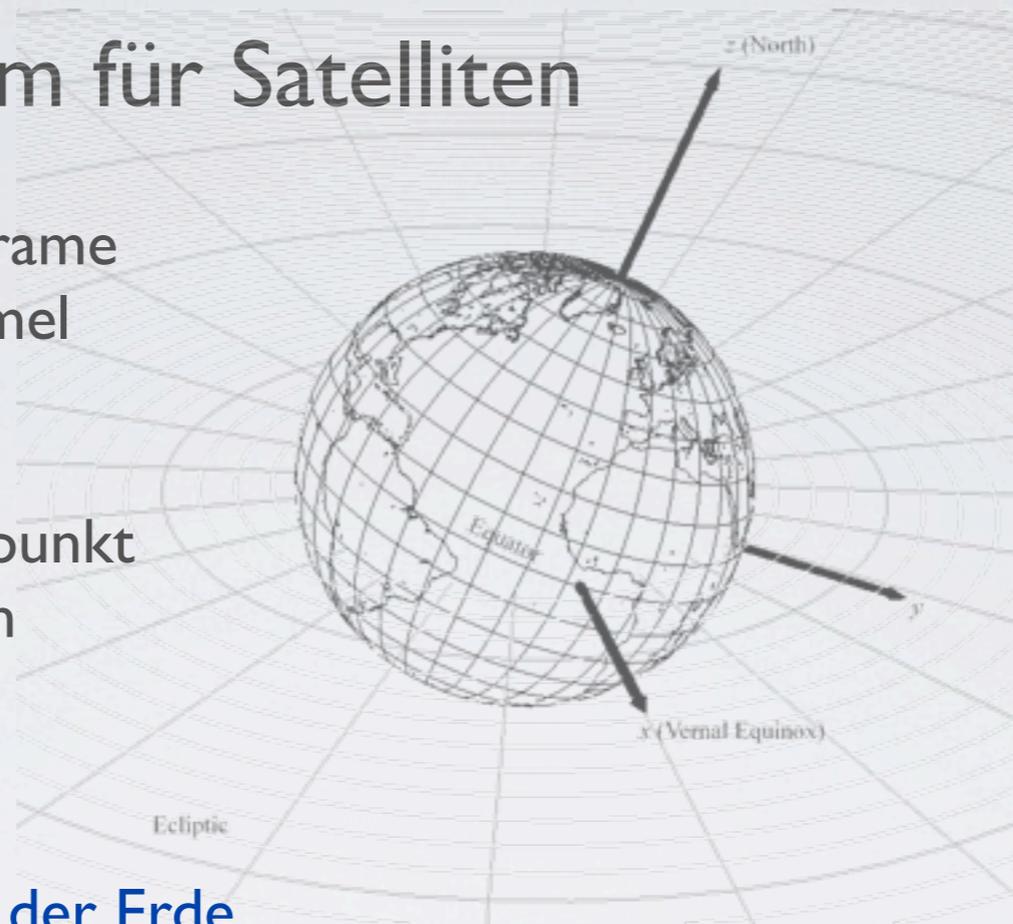
ungeeignet zur Beschreibung auf der Erde



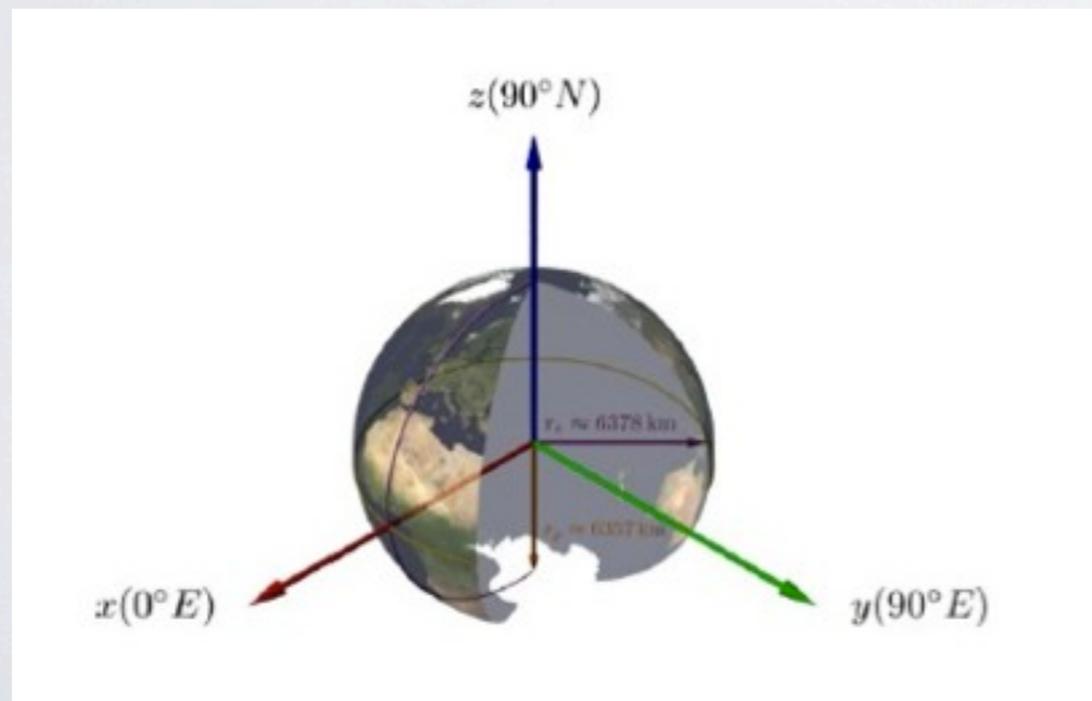
KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

GPS-Koordinatensystem für Satelliten

- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)



ungeeignet zur Beschreibung auf der Erde



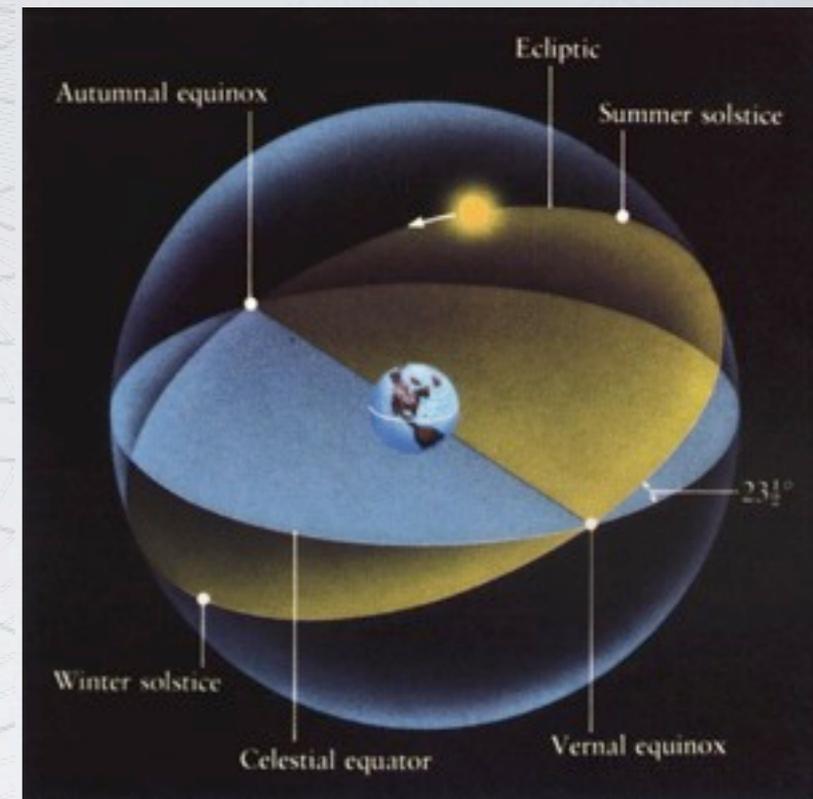
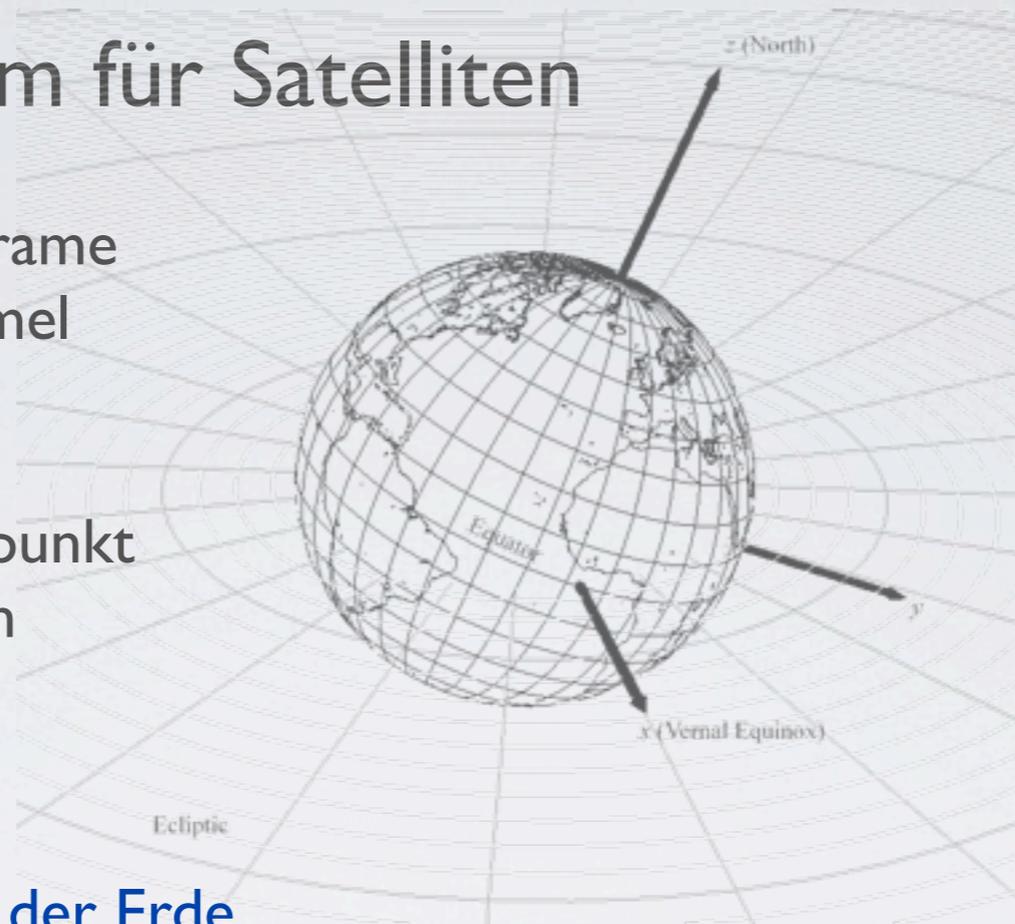
Koordinatensystem auf der Erde

- * ECEF: Earth-Centered Earth-Fixed Frame
- * Beobachter auf der Erde hat feste Koordinaten
- * WGS84: Definition des Erd-"Geoids"
- * ECEF rotiert um ECI: $\omega_{\oplus} = 0.004178^{\circ}/s$
- * GPS-Gerät rechnet ECI in ECEF um !

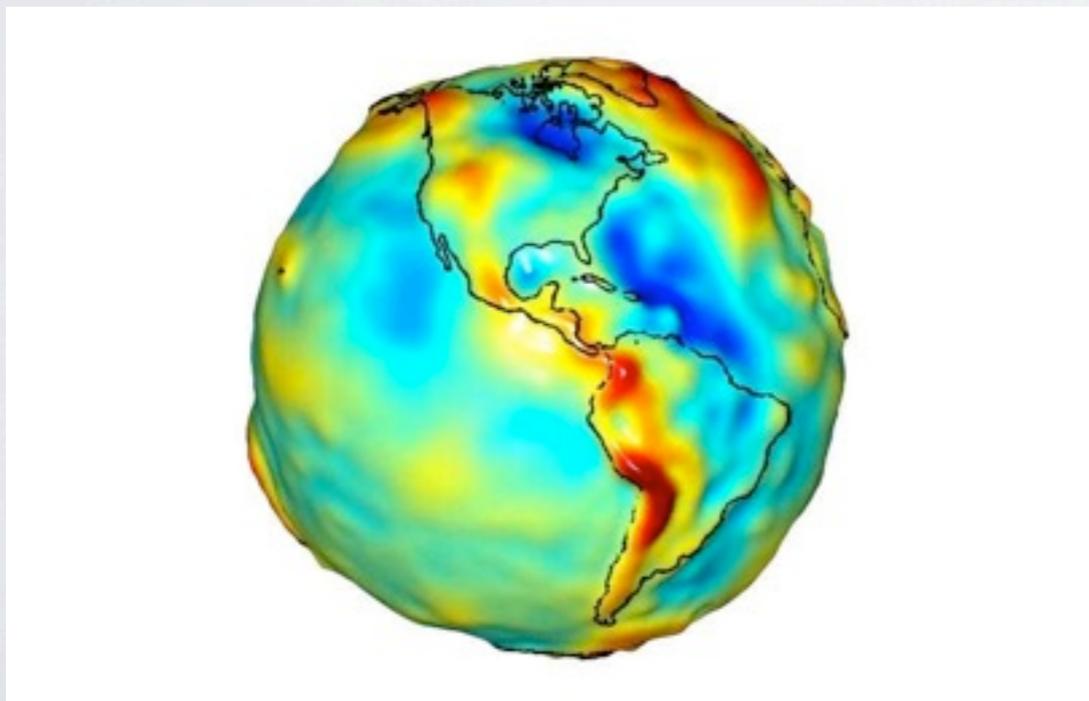
KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

GPS-Koordinatensystem für Satelliten

- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)



ungeeignet zur Beschreibung auf der Erde



Koordinatensystem auf der Erde

- * ECEF: Earth-Centered Earth-Fixed Frame
- * Beobachter auf der Erde hat feste Koordinaten
- * WGS84: Definition des Erd-"Geoids"
- * ECEF rotiert um ECI: $\omega_{\oplus} = 0.004178^{\circ}/s$
- * GPS-Gerät rechnet ECI in ECEF um !

POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

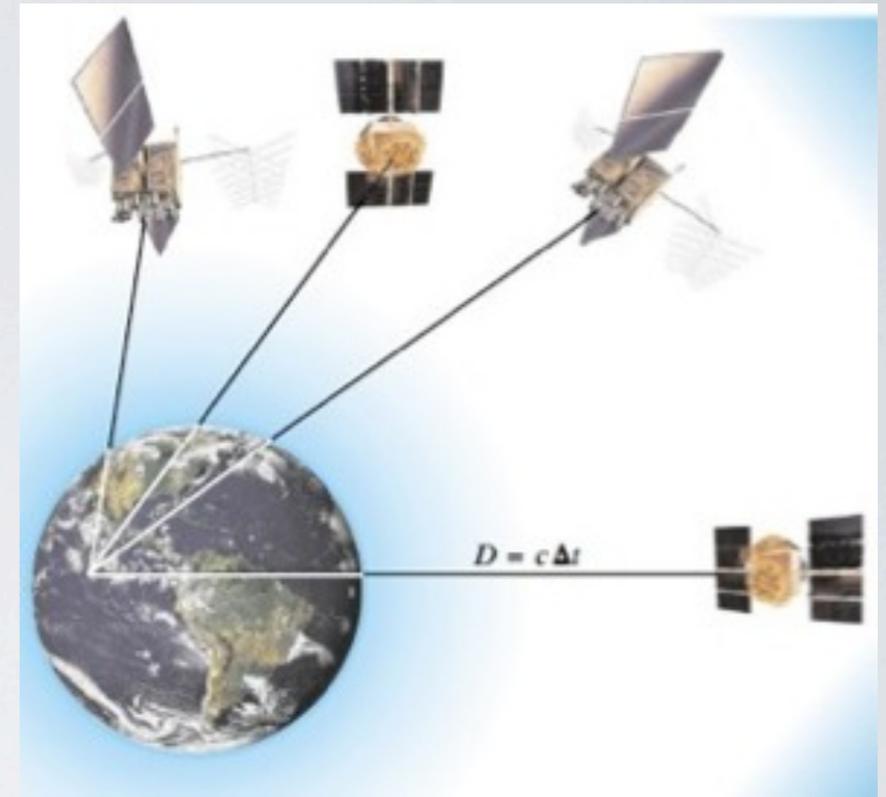
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = d_i = c \cdot (t - t_i)$$

**3 Unbekannte:
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus
Satelliten-Bahndaten

Satellitenzeit: aus
Signal



POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

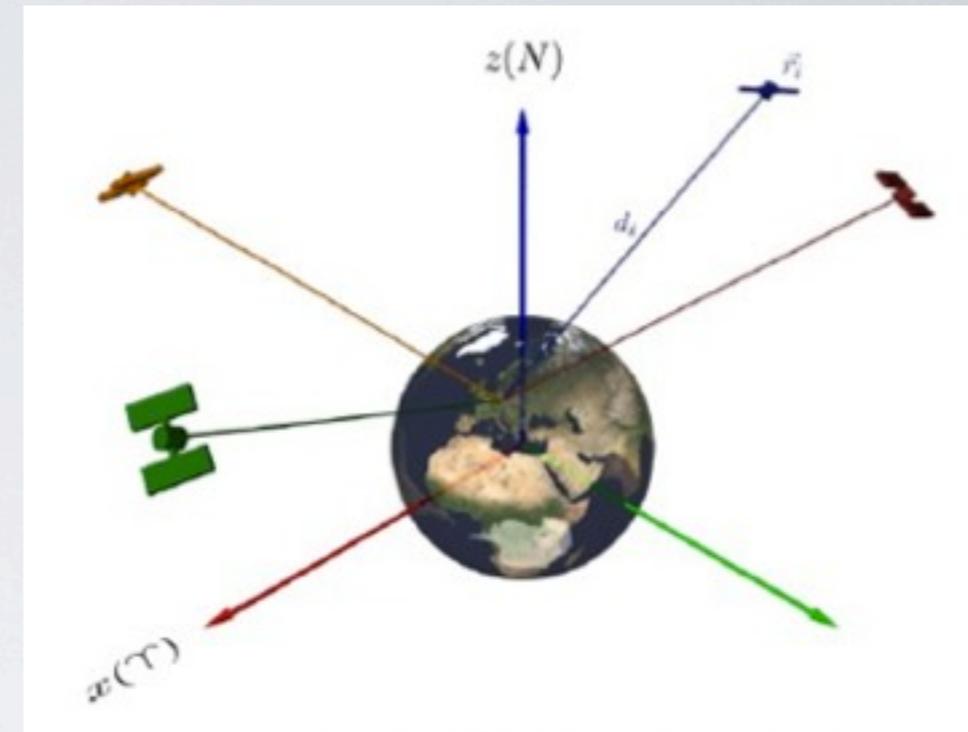
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = d_i = c \cdot (t - t_i)$$

**3 Unbekannte:
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus
Satelliten-Bahndaten

Satellitenzeit: aus
Signal



Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

Offset GPS-/Satellitenuhr: $t = \tau + \Delta$

4 Unbekannte (3 Koord. + Offset) \Rightarrow 4 Satelliten

POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

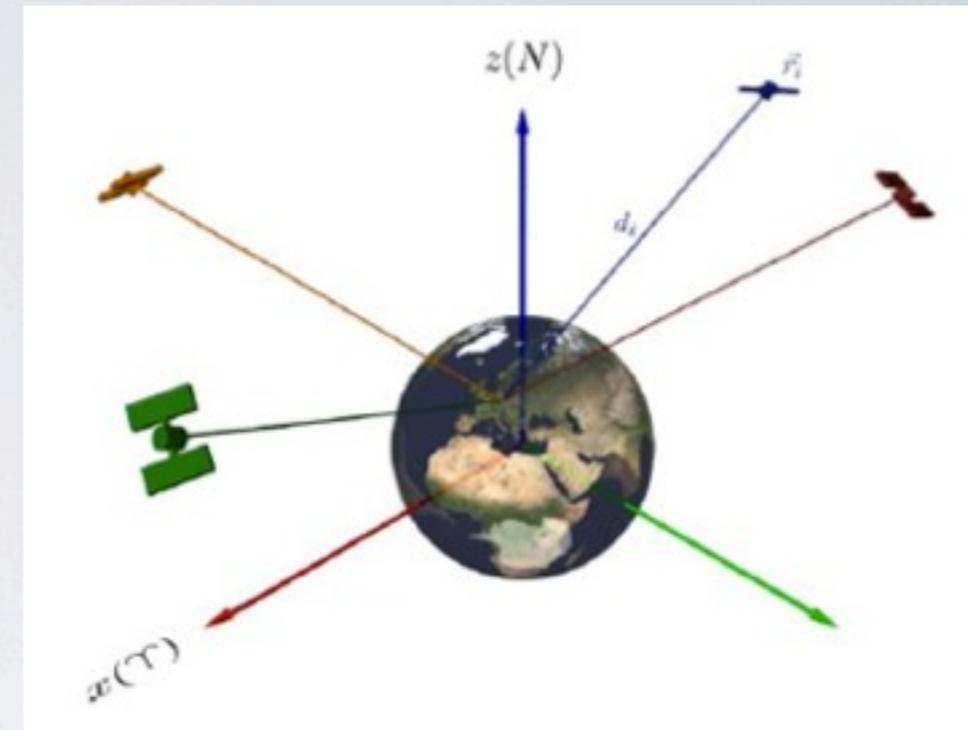
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = d_i = c \cdot (t - t_i)$$

**3 Unbekannte:
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus
Satelliten-Bahndaten

Satellitenzeit: aus
Signal



Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

Offset GPS-/Satellitenuhr: $t = \tau + \Delta$

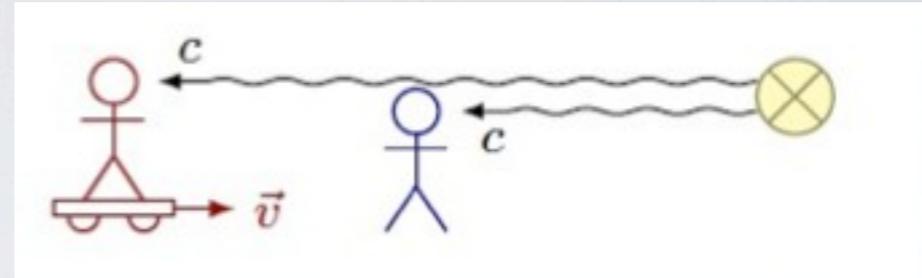
4 Unbekannte (3 Koord. + Offset) \Rightarrow 4 Satelliten

1. Messe bei fester Zeit Abstände
2. Korrekturen: Satellitenuhren-Offset, Ionosphären- und Exzentrizitätskorrektur
3. GPS berechnet ECEF-Satellitenposition
4. Wähle ECI, konvertiere Satellitenposition
5. Löse die Gleichungen
6. Konvertiere GPS-Position zurück nach ECEF
7. Umrechnung in Länge, Breite, Höhe

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Prinzip I: Lichtgeschwindigkeit c ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

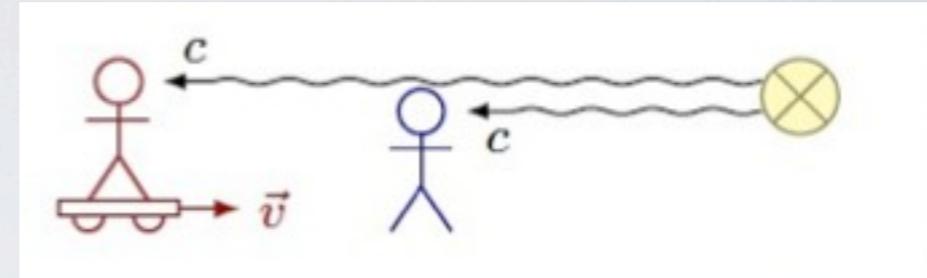
Albert Einstein, 1905



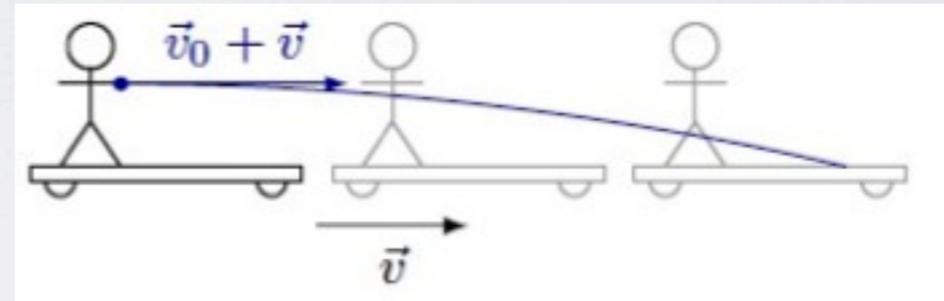
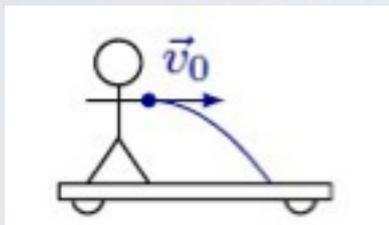
SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Prinzip 1: Lichtgeschwindigkeit c ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

Albert Einstein, 1905



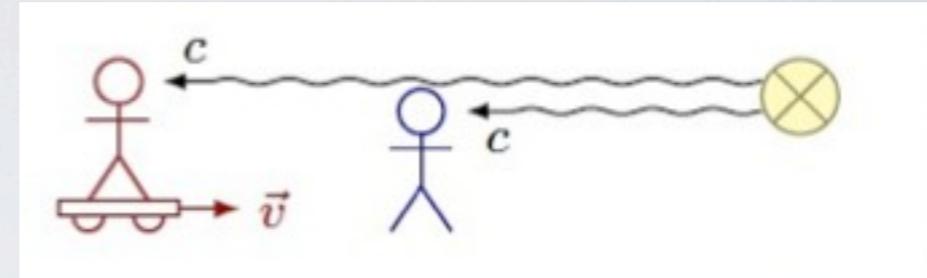
Prinzip 2: Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen



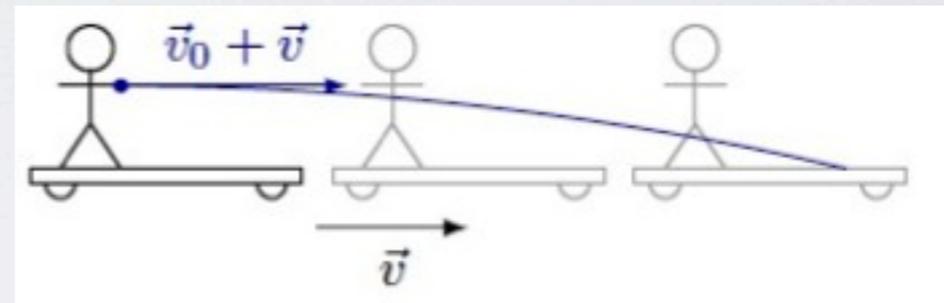
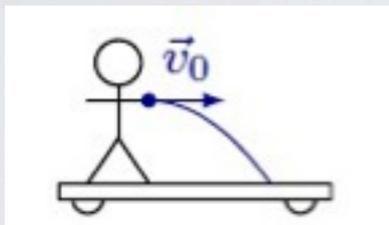
SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Prinzip 1: Lichtgeschwindigkeit c ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

Albert Einstein, 1905



Prinzip 2: Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen

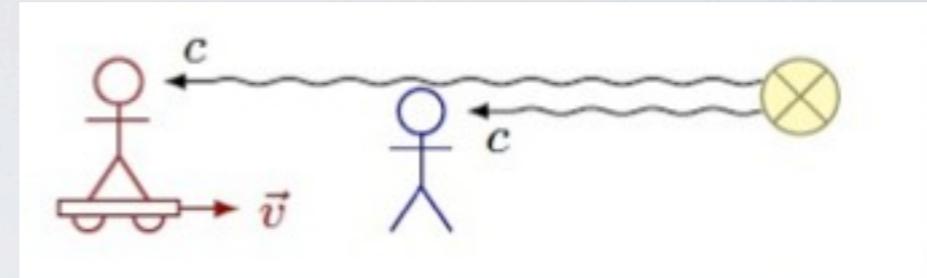


Synchronisation von Uhren: keine globale Gleichzeitigkeit

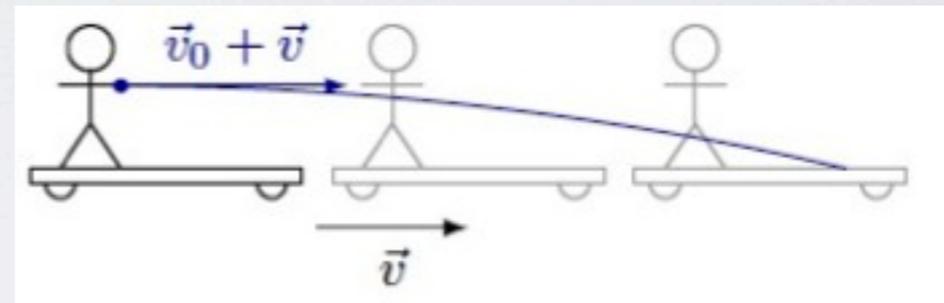
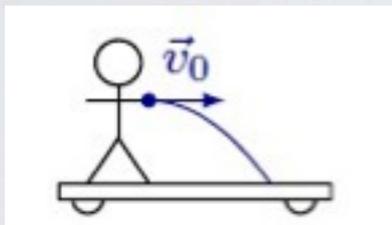
SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Prinzip 1: Lichtgeschwindigkeit c ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

Albert Einstein, 1905

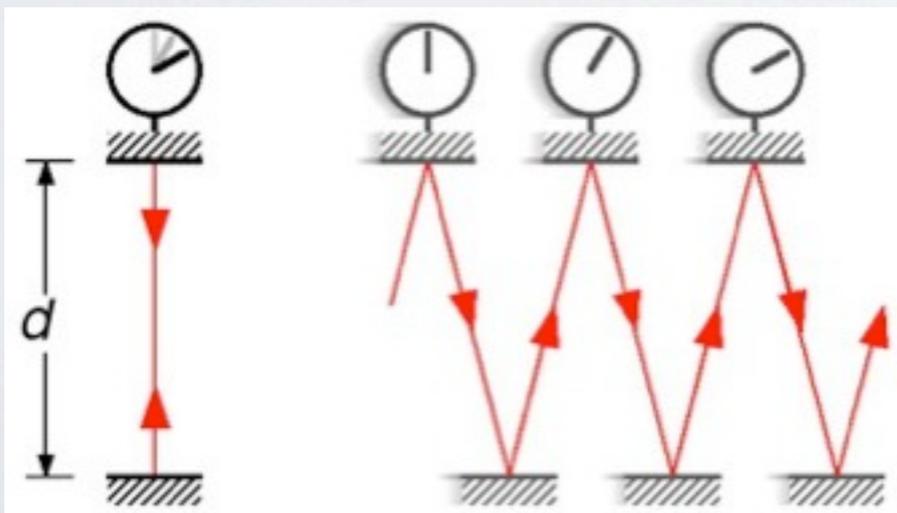


Prinzip 2: Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen



Synchronisation von Uhren: keine globale Gleichzeitigkeit

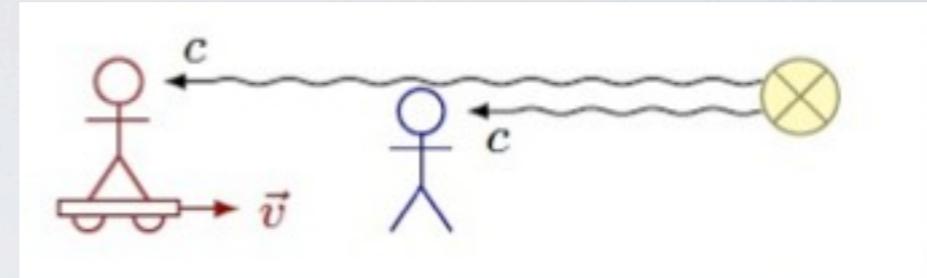
Zeitdilatation



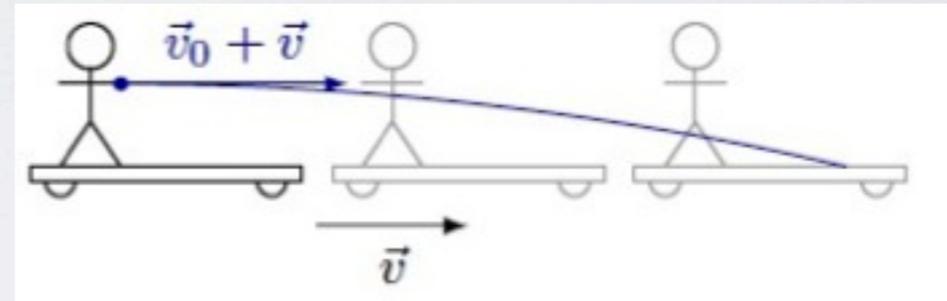
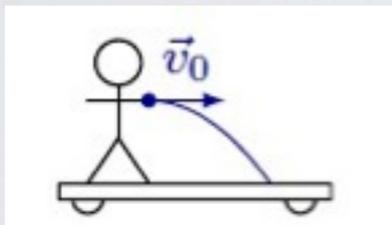
SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Albert Einstein, 1905

Prinzip 1: Lichtgeschwindigkeit c ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

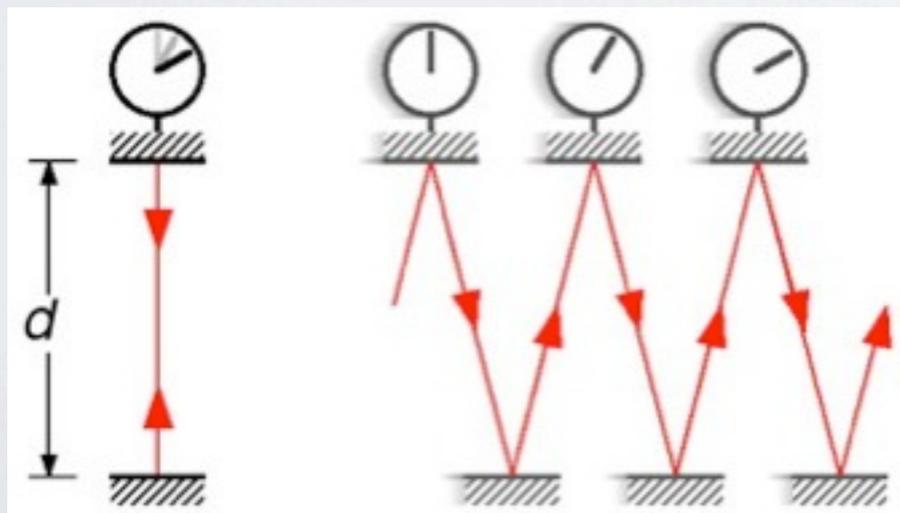


Prinzip 2: Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen

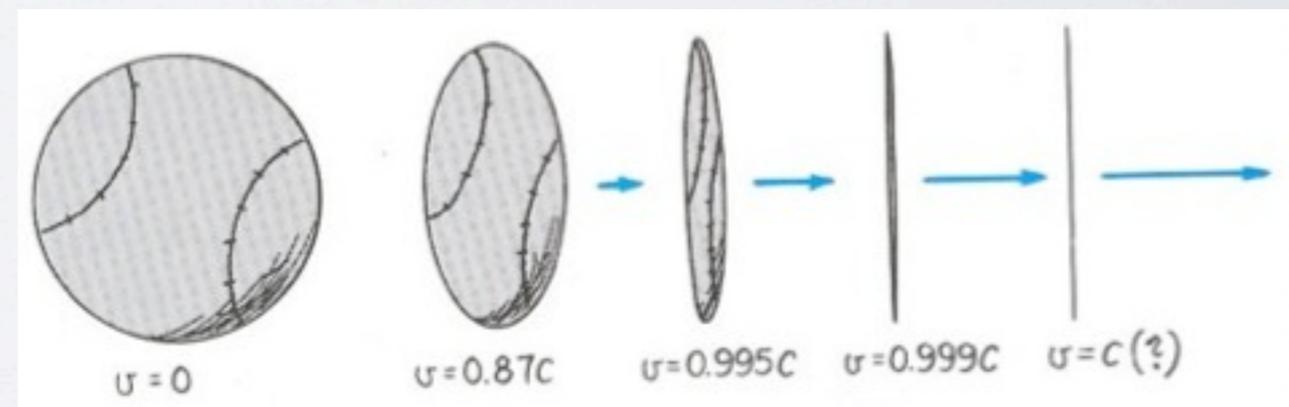


Synchronisation von Uhren: keine globale Gleichzeitigkeit

Zeitdilatation



Längenkontraktion



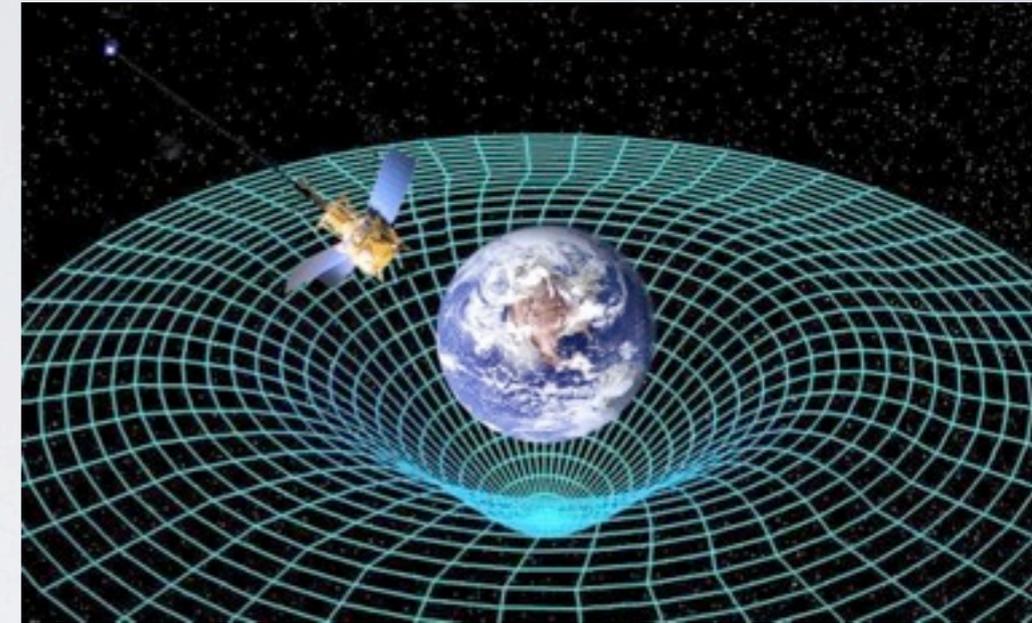
ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Prinzip 1: Alle Formen von Energie krümmen (lokal) das Raumzeitkontinuum (nicht-euklidisch)

Albert Einstein, 1915/16

Prinzip 2: Gravitative Anziehung ist (freie) Bewegung aller Körper auf den kürzesten Kurven (Geodäten) innerhalb der Raumzeit (Bettuch)

ART: geometrische Beschreibung der Raumzeit



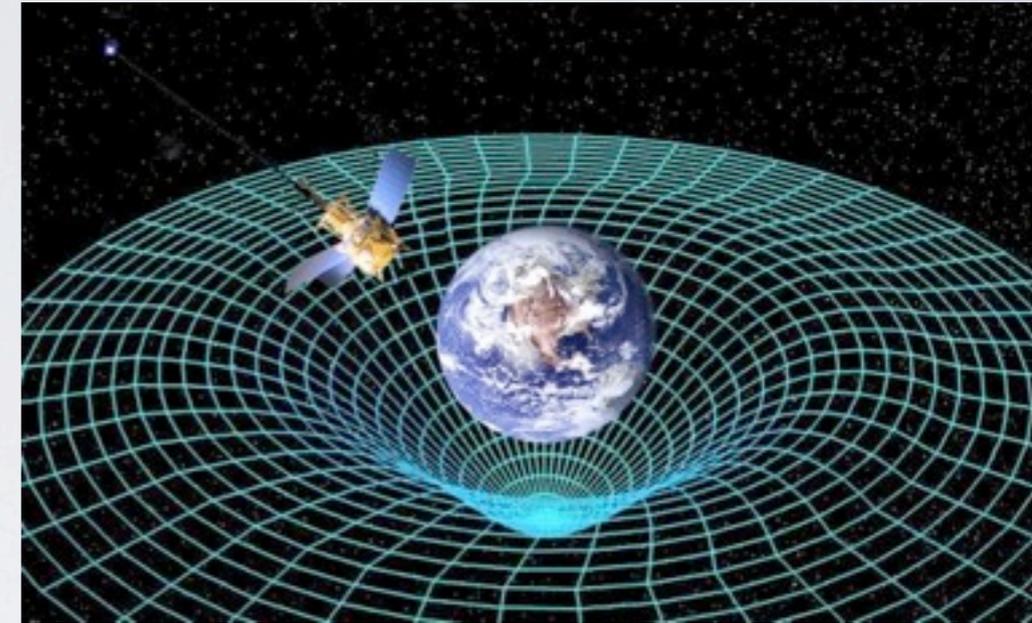
ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Albert Einstein, 1915/16

Prinzip 1: Alle Formen von Energie krümmen (lokal) das Raumzeitkontinuum (nicht-euklidisch)

Prinzip 2: Gravitative Anziehung ist (freie) Bewegung aller Körper auf den kürzesten Kurven (Geodäten) innerhalb der Raumzeit (Bettuch)

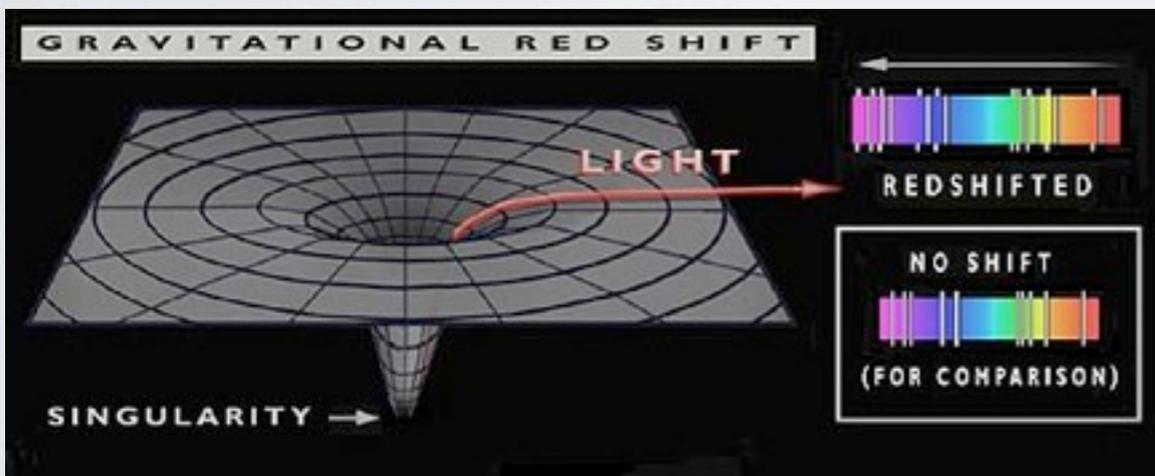
ART: geometrische Beschreibung der Raumzeit



Gravitationsrotverschiebung

Lichtstrahl Richtung stärkeres Gravitationsfeld gewinnt Energie \Rightarrow höhere Frequenz \Rightarrow Blauverschiebung

Lichtstrahl Richtung schwächeres Gravitationsfeld verliert Energie \Rightarrow niedrigere Frequenz \Rightarrow Rotverschiebung



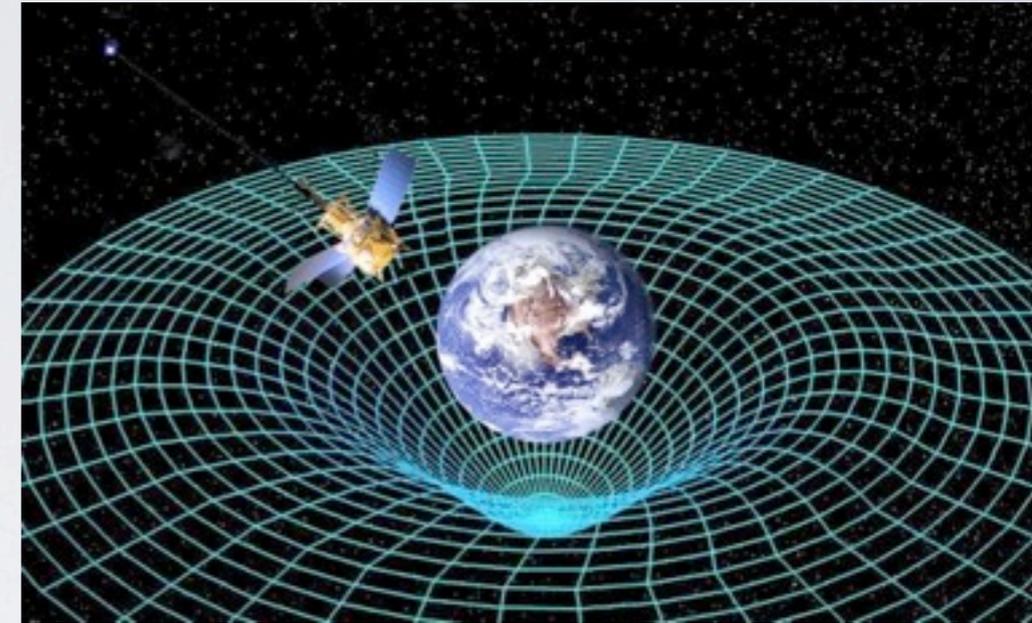
ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Albert Einstein, 1915/16

Prinzip 1: Alle Formen von Energie krümmen (lokal) das Raumzeitkontinuum (nicht-euklidisch)

Prinzip 2: Gravitative Anziehung ist (freie) Bewegung aller Körper auf den kürzesten Kurven (Geodäten) innerhalb der Raumzeit (Bettuch)

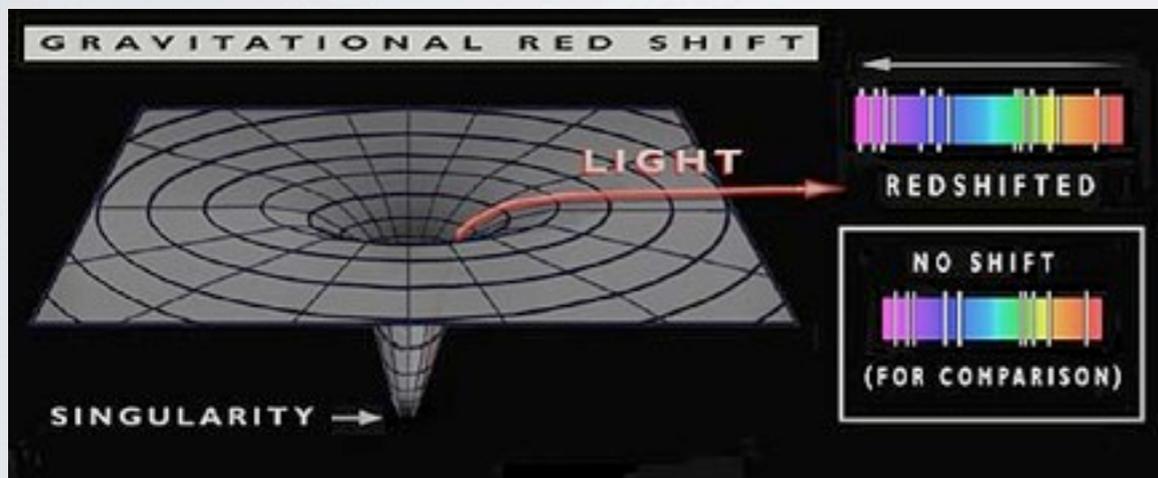
ART: geometrische Beschreibung der Raumzeit



Gravitationsrotverschiebung

Lichtstrahl Richtung stärkeres Gravitationsfeld gewinnt Energie \Rightarrow höhere Frequenz \Rightarrow Blauverschiebung

Lichtstrahl Richtung schwächeres Gravitationsfeld verliert Energie \Rightarrow niedrigere Frequenz \Rightarrow Rotverschiebung



Uhren gehen langsamer in Gravitationsfeldern !!!

$$\Delta t = \frac{\Phi - \Phi_0}{c^2} \cdot t$$

RELATIVISTISCHE EFFEKTE

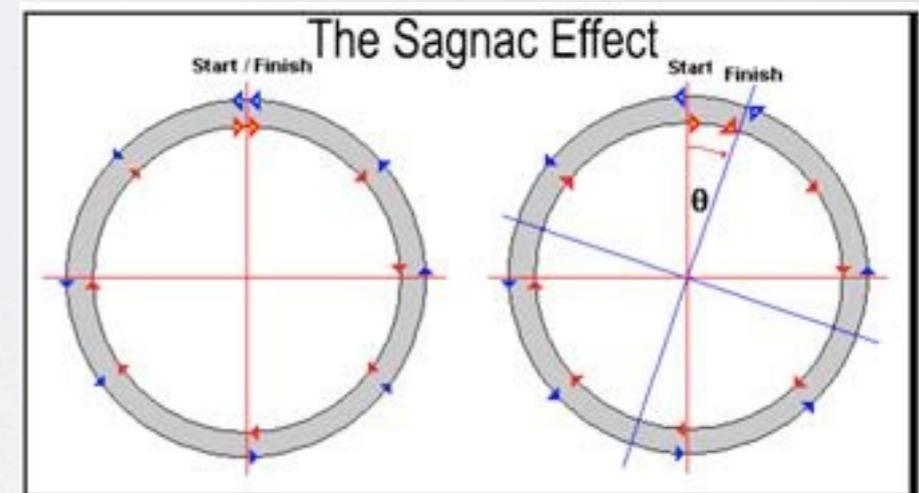
• SRT, Satellitenbewegung ($v = 12.374 \text{ km/h}$)	$\Delta t/t = - 0.000\ 000\ 000\ 083\ 49$
• SRT, Zeitdilatation durch Erdrotation (ECEF vs. ECI)	$\Delta t/t = - 0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
• ART, gravit. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft	$\Delta t/t = + 0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
• ART, gravit. Uhrenunterschied durch Erdgravitation (mit Quadrupolmoment der Erde)	$\Delta t/t = + 0.000\ 000\ 000\ 528\ 88$
	<hr/>
	= 45,685 μs / Tag

RELATIVISTISCHE EFFEKTE

- SRT, Satellitenbewegung ($v = 12.374 \text{ km/h}$) $\Delta t/t = - 0.000\,000\,000\,083\,49$
 - SRT, Zeitdilatation durch Erdrotation (ECEF vs. ECI) $\Delta t/t = - 0.000\,000\,000\,001\,20$
 - ART, gravit. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft $\Delta t/t = + 0.000\,000\,000\,001\,20$
 - ART, gravit. Uhrenunterschied durch Erdgravitation
(mit Quadrupolmoment der Erde) $\Delta t/t = + 0.000\,000\,000\,528\,88$
-
- = 45,685 μs / Tag

SAGNAC/EXZENTRIZITÄTSEFFEKT

- Sagnac-Effekt: Laufzeitunterschiede durch rotierende Systeme: 1984 Satellitenmessung 0,35 μs
- Exzentrizitätskorrektur: Satellitenbahn "eiert"
(Gravitationspotential variiert) $\implies 0,046 \mu\text{s}$

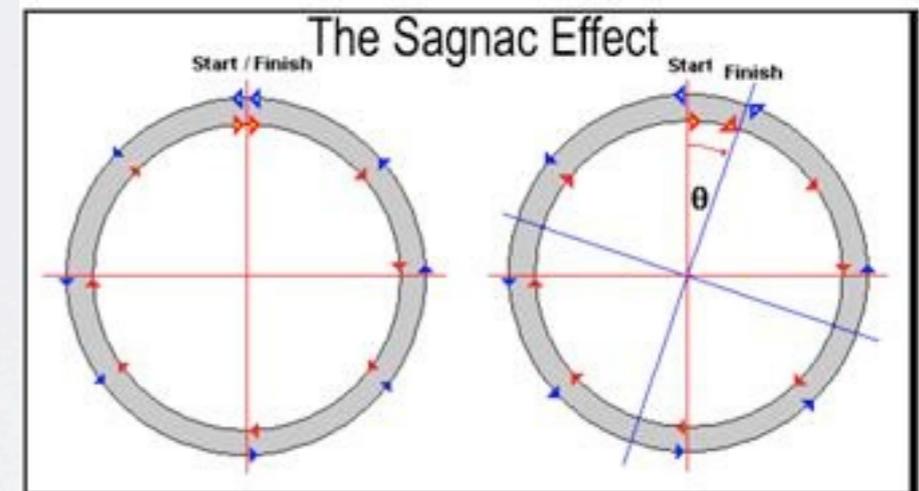


RELATIVISTISCHE EFFEKTE

- SRT, Satellitenbewegung ($v = 12.374 \text{ km/h}$) $\Delta t/t = - 0.000\,000\,000\,083\,49$
 - SRT, Zeitdilatation durch Erdrotation (ECEF vs. ECI) $\Delta t/t = - 0.000\,000\,000\,001\,20$
 - ART, gravit. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft $\Delta t/t = + 0.000\,000\,000\,001\,20$
 - ART, gravit. Uhrenunterschied durch Erdgravitation
(mit Quadrupolmoment der Erde) $\Delta t/t = + 0.000\,000\,000\,528\,88$
-
- $= 45,685 \mu\text{s} / \text{Tag}$

SAGNAC/EXZENTRIZITÄTSEFFEKT

- Sagnac-Effekt: Laufzeitunterschiede durch rotierende Systeme: 1984 Satellitenmessung $0,35 \mu\text{s}$
- Exzentrizitätskorrektur: Satellitenbahn "eiert"
(Gravitationspotential variiert) $\implies 0,046 \mu\text{s}$



TOTALKORREKTUR

Haupteffekt: ART Korrektur: $\Delta t = 39 \mu\text{s} / \text{Tag} \implies 12 \text{ km (!!!) 3-Satellitenmessung}$
(Korrektur durch Frequenzkorrektur von 10.23 nach 10.229999999543 MHz)

VIELEN DANK!!!



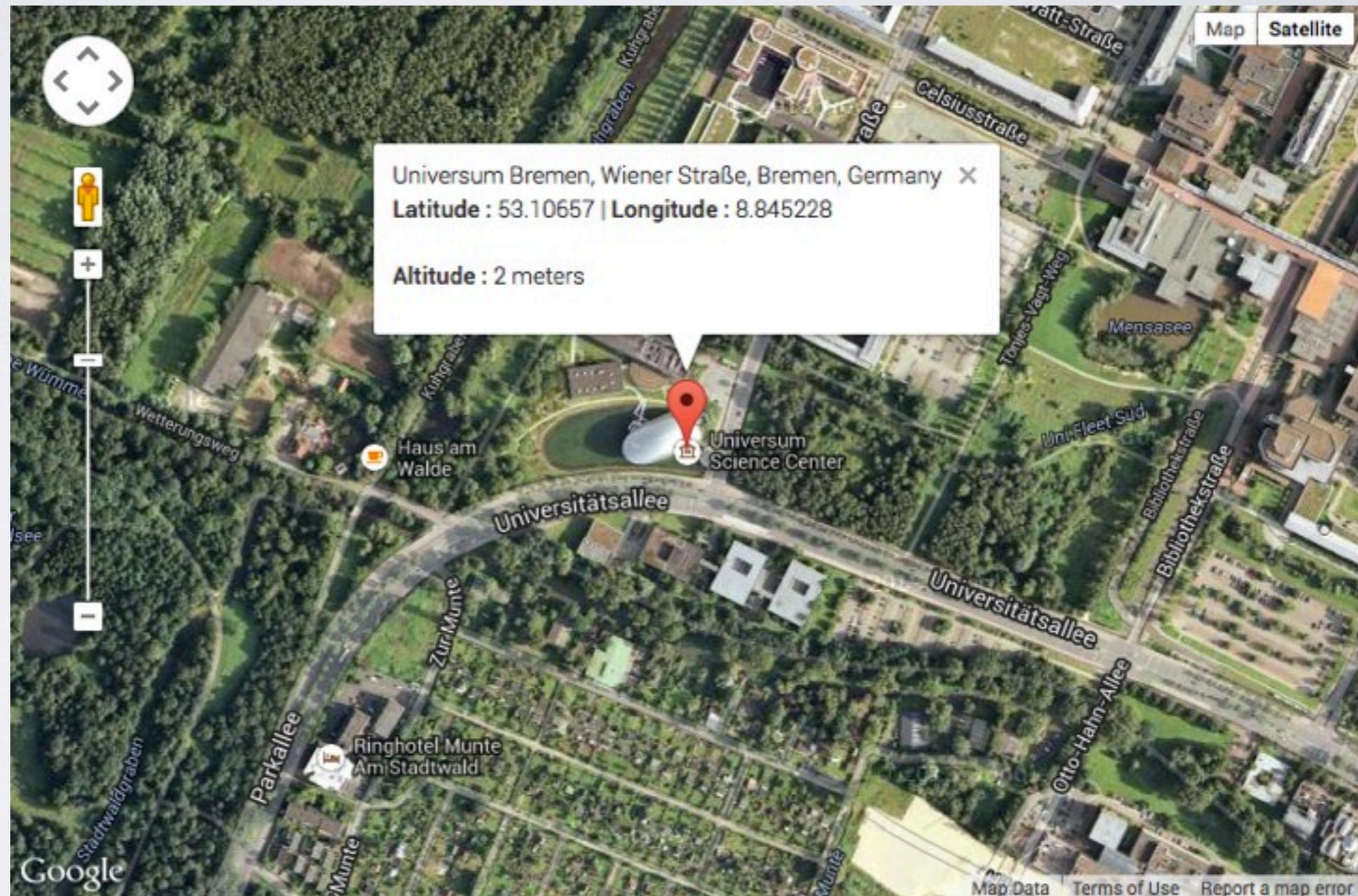
VIELEN DANK!!!

... and don't get lost!



VIELEN DANK!!!

... and don't get lost!



VIELEN DANK!!!

... and don't get lost!

