Die Spezielle Relativitätstheorie und ihre Auswirkungen in Physik und Technik

Peter Schmüser, DESY und Universität Hamburg

1 Einleitung

Die wohl bekannteste Formel der Physik ist die Gleichung $E = mc^2$, die untrennbar mit dem Namen von Albert Einstein verbunden ist. Die hierin ausgedrückte Äquivalenz von Masse und Energie ist von außerordentlicher praktischer Bedeutung, sie ist die Grundlage der Energieproduktion in der Sonne und damit die Voraussetzung für unsere Existenz. Auch die Kernkraftwerke beruhen darauf, dass Masse in Energie umgewandelt werden kann, da bei der Spaltung eines sehr schweren Atomkerns zwei Tochterkerne und Neutronen entstehen, deren Gesamtmasse um etwa ein Promille geringer ist als die Masse des Mutterkerns. Der Massendifferenz entspricht eine Energie von rund 200 MeV pro Spaltprozess, die um viele Größenordnungen über dem Energiegewinn bei chemischen Reaktionen (Verbrennung fossiler Brennstoffe) liegt. Auf diese fundamentalen Konsequenzen der Relativitätstheorie werde ich in meinem Vortrag aber nicht weiter eingehen, da sie in allen Physik-Lehrbüchern zu finden und allgemein bekannt sind.

Nach einer Einführung in die Grundbegriffe der speziellen Relativitätstheorie möchte ich aus der Vielzahl möglicher Themenkomplexe drei herausgreifen, mit denen ich mich während meiner Berufstätigkeit befasst habe und die die Auswirkungen der Relativitätstheorie in Physik und Technik in schöner Weise verdeutlichen:

- Elementarteilchenphysik und Beschleuniger
- Das Magnetfeld als relativistischer Effekt
- Der Freie-Elektronen-Laser, eine relativistische Strahlungsquelle

Diese Ausarbeitung enthält mehr Material als mein einstündiger Vortrag in Bad Honnef. Um dem Leser das Nachvollziehen der Rechnungen zu erleichtern, wird auch der mathematische Formalismus der Relativitäts- und Quantentheorie ausführlicher dargestellt.

2 Grundbegriffe der speziellen Relativitätstheorie

2.1 Lorentztransformation

Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie ist das Prinzip, dass die physikalischen Gesetze nicht vom Koordinatensystem des Beobachters abhängen sollten. Man darf dabei aber nur sogenannte *Inertialsysteme* zulassen, das sind nicht beschleunigte Bezugssysteme, die sich gegeneinander nur geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegen dürfen. In einem Karussel oder einer startenden Weltraumrakete wird der Mitfahrer andere Gesetzmäßigkeiten feststellen. Beschleunigte Bezugssysteme sind Gegenstand der allgemeinen Relativitätstheorie.

Ein Relativitätsprinzip war bereits lange vor Einstein bekannt. Betrachten wir ein Koordinatensystem (x^*, y^*, z^*), das sich mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur x-Achse des *Laborsystems* (x, y, z) bewegt, siehe Abb. 1.

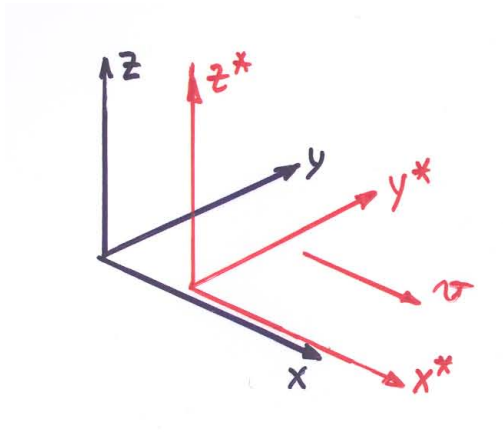

Abbildung 1: *Das Laborsystem* (x, y, z) *und das gleichförmig bewegte Bezugssystem* (x^*, y^*, z^*).

Diese Bezugssysteme sind durch die *Galilei-Transformation*

$$\begin{aligned} x &= x^* + vt \\ y &= y^* \\ z &= z^* \end{aligned} \tag{1}$$

miteinander verknüpft, die Beschleunigungen invariant lässt. Die Newton'sche Gleichung

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

ist in beiden Bezugssystemen gültig. Die Geschwindigkeiten werden allerdings verändert. Als Beispiel wählen wir einen Eisenbahnwagen, der mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung fährt. Im Fahrzeug wird ein Lichtsignal nach vorne ausgesandt, ein anderes nach hinten. Von der Erde aus betrachtet sollten diese Signale die Geschwindigkeiten $c+v$ und $c-v$ haben. Ein entsprechendes Experiment ist von Michelson und Morley ausgeführt worden, wobei die Erde als Raumschiff in einem hypothetischen *Äther* diente. Die große Überraschung war, dass Licht unabhängig von der Richtung immer genau die gleiche Geschwindigkeit c hat.

Albert Einstein nahm dies Resultat zum Anlass, die Existenz einer absoluten und allgemein gültigen Zeit

in Frage zu stellen. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen ist mit der Galilei-Transformation unvereinbar. Einstein erkannte, dass die *Lorentz-Transformation* eine richtige Beschreibung liefert. Das wesentlich Neue ist, dass in gegeneinander bewegten Koordinatensystemen verschiedene Zeitskalen gelten. Unsere Labor-Koordinaten bezeichnen wir mit (t, x, y, z), die des bewegten Systems mit (t^*, x^*, y^*, z^*) . Die Lorentztransformation lautet

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t^* + \beta x^*/c) \\ x &= \gamma(x^* + \beta c t^*) \\ y &= y^* \\ z &= z^* \end{aligned} \tag{2}$$

Hierbei ist $\beta = v/c$, und in den Gleichungen tritt der wichtige *Lorentz-Faktor* auf

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3}$$

Bemerkenswert ist, dass nur die Zeit und die zur Bewegungsrichtung parallele Koordinate (hier x) transformiert werden, während die dazu senkrechten Koordinaten (hier y und z) unverändert bleiben. Für niedrige Geschwindigkeiten $v \ll c$ ist $\gamma \approx 1$, und es folgt $t = t^*$: für $\beta \to 0$ geht die Lorentztransformation in die Galilei-Transformation über.

2.2 Zeitdilatation, Längenkontraktion

Eine unmittelbare Konsequenz der Lorentztransformation ist die Zeitdilatation (Zeitdehnung): gesehen vom Laborsystem (t, x, y, z) geht eine Uhr im (t^*, x^*, y^*, z^*)-System langsamer. Aus den obigen Gleichungen kann man das leicht erkennen, indem man die Uhr im bewegten System an den Ort $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ setzt, es wird dann $t = \gamma t^*$. Beispielsweise hat eine normale Quarzuhr eine Schwingungsperiode von $\tau^* = 30\ \mu$s. Könnte man die Uhr so schnell fliegen lassen, dass ihr γ-Faktor 2 wäre, so würde man von der Erde aus eine Periode von $\tau = \gamma\tau^* = 60\ \mu$s wahrnehmen. Einstein hat die Zeitdehnung durch eines seiner berühmten *Gedankenexperimente* verdeutlicht, die Lichtuhr, die in Abb. 2 dargestellt ist. Die Uhr bewege sich mit der Geschwindigkeit v in horizontaler Richtung. Eine Lampe sendet einen kurzen Lichtblitz in vertikaler Richtung aus, der zu einem Spiegel im Abstand d läuft, dort reflektiert wird und dann in einem Detektor registriert wird. Im Ruhesystem (t^*, x^*, y^*, z^*) der Uhr ist die Lichtlaufzeit von der Blitzlampe bis zum Spiegel (bzw. vom Spiegel bis zum Detektor)

$$\tau^* = d/c \tag{4}$$

Wie sieht der Lichtweg vom Laborsystem aus? Der transversale Abstand d bleibt unverändert, aber wenn das Licht den Spiegel erreicht und dafür die Zeit τ gebraucht hat, ist der Spiegel in dieser Zeit um die Strecke

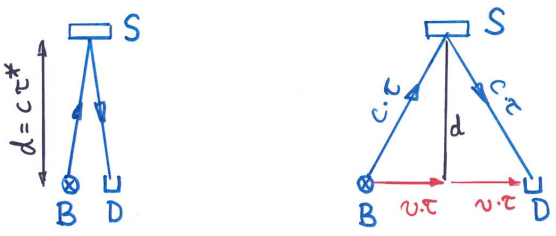

Abbildung 2: *Albert Einsteins Gedankenexperiment zur Zeitdehnung: die Lichtuhr. B: Blitzlampe, S: Spiegel, D: Detektor. Links wird die Uhr in ihrem Ruhesystem gezeigt, rechts im Laborsystem.*

$v\tau$ weitergeflogen. Das Licht folgt also der Dreiecksbahn. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$(c\tau)^2 = d^2 + (v\tau)^2 \tag{5}$$

Hier wird benutzt, dass die Lichtgeschwindigkeit auch im Laborsystem den Wert c hat. Aus den Gleichungen (4) und (5) ergibt sich dann

$$\tau = \frac{\tau^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\tau^* \tag{6}$$

Vom Laborsystem gesehen erscheint der Zeittakt der Uhr um den Lorenz-Faktor verlängert.

Eng verknüpft mit der Zeitdehnung ist die Längenkontraktion: ein bewegter Maß-Stab erscheint um den Lorentzfaktor verkürzt

$$L = \frac{L^*}{\gamma} \tag{7}$$

Auch hierfür gibt es ein Gedankenexperiment, das ich aber aus Zeitmangel nicht diskutieren möchte.

Die erreichbaren Geschwindigkeiten makroskopischer Körper sind immer sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, daher ist die scheinbare Verlangsamung bewegter Uhren nur sehr klein. Mit Atomuhren ist sie aber gut messbar und für das Globale Positionierungssystem GPS von großer Bedeutung.

Sehr drastisch sind die Lebensdauerverlängerungen kurzlebiger Elementarteilchen, die mit hohen Energien erzeugt werden. Die Halbwertszeit $T^*_{1/2}$ massiver instabiler Teilchen ist bezüglich ihres Ruhesystems definiert[1]. Die Zahl der Teilchen nimmt exponentiell ab und ist nach der Zeit $T^*_{1/2}$ auf die Hälfte abgesunken. Bei Teilchen, die mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ im 'Laborsystem' fliegen, misst man eine längere Halbwertszeit

$$T^{lab}_{1/2} = \gamma T^*_{1/2}$$

[1] In der Teilchenphysik ist es üblich, die *mittlere Lebensdauer* $\tau = T_{1/2}/\ln 2$ anzugeben, wobei der Index * weggelassen wird.

Das bekannteste Beispiel sind die μ-Teilchen der Höhenstrahlung. Die μ^--Leptonen (oder Myonen) sind schwere Verwandte der Elektronen ($m_\mu = 208 m_e$) und zerfallen mit einer Halbwertszeit $T^*_{1/2} = 1.52$ μs in ein Elektron und zwei Neutrinos. Erzeugt werden sie in etwa 20 - 30 km Höhe als Sekundärprodukte bei Stößen hochenergetischer Protonen mit Atomkernen der äußeren Lufthülle:
Proton + Kern $\rightarrow$ π-Mesonen + Nukleonen, $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + 1$ Neutrino.
Selbst wenn die μ-Teilchen mit der maximalen Geschwindigkeit von c fliegen sollten, könnten sie innerhalb ihrer Halbwertszeit nur 457 m zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit w, dass ein μ-Teilchen eine Strecke von 20 km "überlebt", die $20000/457 = 44$ Halbwertszeiten entspricht, wäre verschwindend gering

$$w = \left(\frac{1}{2}\right)^{44} = 6.7 \cdot 10^{-14}$$

Der beobachtete hohe Fluss von Myonen der Höhenstrahlung wäre unverständlich. Die Lösung des Rätsels liegt in der Lebensdauerverlängerung. Die Teilchen entstehen mit hoher Energie, der Lorentzfaktor liegt im Mittel bei $\gamma = 16$. Die Labor-Halbwertszeit ist demnach $T_{1/2} = 16\, T^*_{1/2}$, und die Flugstrecke, die die Hälfte der Teilchen überlebt, ist $L_{lab} \approx cT_{1/2} = 7310$ m. Die Strecke von 20000 m entspricht dann nur noch 2.7 Halbwertszeiten, und die Wahrscheinlichkeit, diese Strecke ohne Zerfall zurückzulegen, ist recht groß

$$w = \left(\frac{1}{2}\right)^{2.7} = 15\%$$

Wie sieht die Situation im Ruhesystem der Teilchen aus? Hier gibt es keine Halbwertszeitverlängerung, wohl aber eine Längenkontraktion. Vom μ-Teilchen aus gesehen ist die 20 km-Strecke wie ein Maß-Stab, der dem Teilchen mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ entgegenfliegt und dessen Länge um den Faktor γ verkürzt ist, also nur 1250 m beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Maß-Stab ohne Zerfall zu passieren, ist genau wieder $w = 15\%$. In beiden Bezugssystemen erhalten wir also die gleiche physikalische Aussage, dass nämlich 15% der in 20 km Höhe erzeugten Myonen am Erdboden ankommen.

Ein Problem taucht aber trotzdem auf. Vom bewegten System aus gesehen gehen die Uhren im Laborsystem langsamer, d.h. die schnell bewegten Myonen würden behaupten, dass ihre im Labor ruhenden Brüder länger leben als sie selbst. Nun fliegen aber beide immer weiter voneinander weg und können nicht mehr nachprüfen, wer nun wirklich länger lebt, die im Labor bewegten oder die im Labor ruhenden Teilchen. Es gibt jedoch ein Experiment, mit dem diese Prüfung möglich ist, und dieses beruht darauf, dass die Zeitdehnung auch in beschleunigten Koordinatensystemen auftritt.

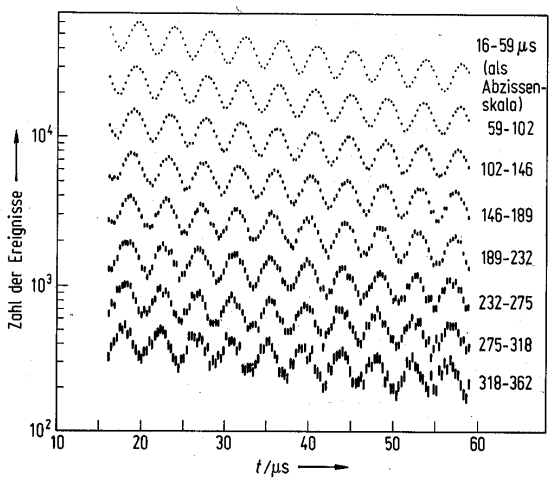

Abbildung 3: *Die exponentielle Abnahme der Zahl hochenergetischer Myonen ($\gamma = 65$) in einem Speicherring als Funktion der Zeit im Bereich von 19 - 362 μs. Die im Laborsystem gemessene Halbwertszeit ist etwa 100 μs. In diesem Experiment wurde das magnetische Moment des Myons mit hoher Genauigkeit bestimmt durch Vermessung der Präzession der magnetischen Momente in einem Magnetfeld. Die dem exponentiellen Abfall überlagerten Oszillationen werden durch die Präzession verursacht, siehe [1].*

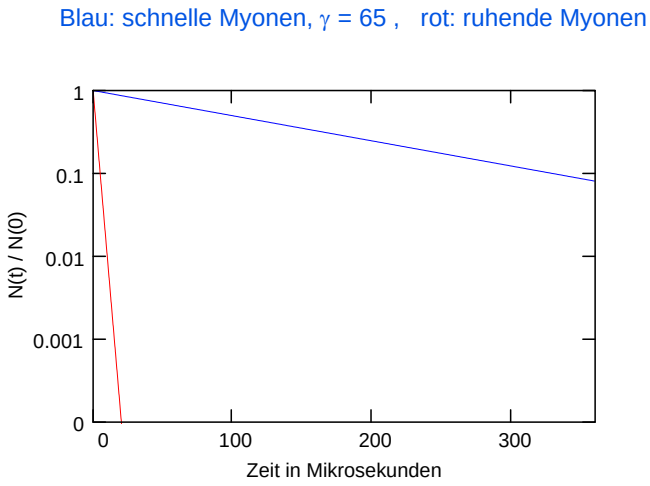

Abbildung 4: *Vergleich des Zerfalls der hochenergetischen Myonen im Speicherring mit dem Zerfall ruhender Myonen.*

In Brookhaven und am CERN sind Speicherringe für Myonen gebaut worden, um das magnetische Moment des Myons mit hoher Präzision zu messen. Bei einem dieser Experimente wurden die Teilchen mit $\gamma = 65$ in den Ring eingeschossen. Die vom Labor aus beobachtete Abnahme der Teilchenzahl ist in Abb. 3 aufgetragen. Die Labor-Halbwertszeit ist $65 \cdot T^*_{1/2} = 99$ μs. Im

Speicherring kehren die Teilchen immer wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurück. Das Einstein'sche Zwillingsparadoxon ist hier in der Tat realisiert: die schnell bewegten Teilchen leben immer noch, wenn ihre ruhenden Brüder schon längst 'gestorben' sind. Dies wird schematisch in Abb. 4 dargestellt.

Eine weitere schöne Anwendung der Zeitdilatation ist die Bestimmung der mittleren Lebensdauer der B-Mesonen am Speicherring LEP in Genf. Diese kurzlebigen Teilchen entstehen mit einem γ-Faktor von etwa 10 und legen zwischen Erzeugung und Zerfall viele Millimeter zurück. In Abb. 5 ist die Zahl der Teilchen als Funktion der Flugstrecke aufgetragen. Man beobachtet die exponentielle Abnahme über drei Zehnerpotenzen.

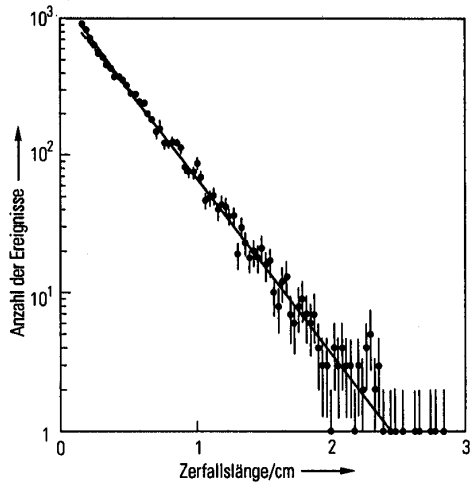

Abbildung 5: *Die exponentielle Abnahme der Zahl hochenergetischer B-Mesonen ($\gamma \approx 10$) als Funktion der Flugstrecke zwischen Erzeugung und Zerfall (LEP-Speicherring).*

2.3 Addition von Geschwindigkeiten

Ich komme auf mein Anfangsbeispiel zurück. In einem mit der Geschwindigkeit v fahrenden Wagen bewege sich ein Objekt mit der Geschwindigkeit u^* nach vorn oder hinten. In der nichtrelativistischen Mechanik würden wir die Geschwindigleiten einfach addieren, d.h. die Geschwindigkeit des Objekts relativ zum Erdboden wäre $u = v + u^*$ bzw. $u = v - u^*$. Relativistisch sieht das komplizierter aus. Aus der Lorentz-Transformation kann man herleiten

$$u = \frac{v + u^*}{1 + \frac{v\,u^*}{c^2}} \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{v - u^*}{1 - \frac{v\,u^*}{c^2}} \tag{8}$$

Wenn v und u^* beide sehr klein gegen c sind, hat der Nenner den Wert 1, und es ergibt sich die alte Formel $u = v \pm u^*$. Nun betrachten wir statt des bewegten Objekts einen Lichtimpuls. Im Bezugssystem des Wagen hat er die Geschwindigkeit $u^* = c$ oder $u^* = -c$. Setzen wir dies in Gleichung (8) ein, so finden wir für die Geschwindigkeit des Lichtes relativ zum Erdboden ebenfalls die Werte $u = +c$ oder $u = -c$.

Man kann die Formel (8) so verallgemeinern, dass der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{u}^*$ im bewegten System einen beliebigen Winkel zur Bewegungsrichtung des Wagens haben darf. Wenden wir dies auf den Lichtblitz an, so finden wir auch in diesem Fall, dass der Betrag der Geschwindigkeit im Laborsystem immer den Wert c hat. Die relativistischen Formeln zur 'Addition' von Geschwindigkeiten stellen also sicher, dass die Lichtgeschwindigkeit in beliebigen Inertialsystemen stets den Betrag c hat.

2.4 Masse, Energie, Impuls

In der Newton'schen Mechanik lauten die Gleichungen für den Impuls und die kinetische Energie eines Teilchens

$$p = mv\,, \quad E_{kin} = \frac{m}{2}\,v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Es stellt sich heraus, dass diese Formeln nur für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ gültig sind. Der relativistische Impuls ist

$$p = \gamma m_0 v\,, \tag{9}$$

wobei m_0 die *Ruhemasse* des Teilchens ist. Dies ist die Masse, die man im *Ruhesystem* messen würde, dem Bezugssystem, in dem das Teilchen ruht. Die gesamte relativistische Energie eines Teilchens berechnet man mit der Formel[2]

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4\,, \quad E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \tag{10}$$

Energie ist äquivalent zur Masse. Setzen wir (9) in (10) ein, so können wir die totale Energie eines Teilchens in der Form

$$E = \gamma m_0 c^2 \equiv mc^2 \quad \text{mit} \quad m = \gamma m_0 \tag{11}$$

schreiben und ordnen damit dem bewegten Teilchen eine höhere Masse zu als dem ruhenden Teilchen. Der Impuls kann daher als Produkt der *bewegten Masse* $m = \gamma m_0$ und der Geschwindigkeit dargestellt werden

$$p = mv \equiv \gamma m_0 v \tag{12}$$

Im Abschnitt 'Beschleuniger' werde ich motivieren, dass dies sinnvoll ist.

Die relativistische Energie E umfasst die *Ruhe-Energie* m_0c^2 und die kinetische Energie, die man so berechnen kann

$$E_{kin} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2 \tag{13}$$

Ich betrachte zunächst den nichtrelativistischen Grenzfall dieser Gleichung. Wenn der Impuls klein ist, kann man für die Wurzel unter Benutzung der Taylorentwicklung näherungsweise schreiben $\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \approx m_0c^2 +$

[2] Eine potentielle Energie ist hierin nicht enthalten.

$p^2/(2m_0)$. Bei kleinen Geschwindigkeiten wird daher die kinetische Energie durch die Newton'sche Formel

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m_0}$$

beschrieben. Gleichung (13) gilt dagegen ganz allgemein und ist unentbehrlich in Teilchenphysik, wo die Geschwindigkeiten praktisch immer groß sind.

Für die totale Energie und den Impuls gibt es eine Lorentztransformation von dem bewegten System $S^* = (t^*, x^*, y^*, z^*)$ in das ruhende System $S = (t, x, y, z)$, die der von Zeit und Raum entspricht.

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E^* + \beta c p_\parallel^*) \\ p_\parallel &= \gamma(p_\parallel^* + \beta E^*/c) \\ p_\perp &= p_\perp^* \end{aligned} \tag{14}$$

Ich habe diese Transformation in einer für die Anwendungen praktischen Form geschrieben. Hierin bedeuten $p_\parallel$ die Komponente des Impulses parallel zur Bewegungsrichtung des Systems S^* und $p_\perp$ die dazu senkrechte Komponente.

Eine wichtige Anwendung dieser Formeln betrifft den relativistischen Doppler-Effekt. Ein Radarsender oder eine Lichtquelle nähern sich dem Beobachter mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$. Wenn im Ruhesystem S^* der Quelle elektromagnetische Wellen der Frequenz f^* und der Wellenlänge $\lambda^* = c/f^*$ ausgesandt werden, so misst der Beobachter eine höhere Frequenz und eine kleinere Wellenlänge. Die Energie der Photonen in S^* ist $E_{ph}^* = \hbar\omega^* = 2\pi\hbar f^*$, ihr Impuls ist $p_{ph}^* = \hbar\omega^*/c$. Für den Spezialfall, dass die Photonen nach vorn emittiert werden (in Richtung auf den Beobachter zu), gilt $p_\parallel^* = p_{ph}^* = \hbar\omega^*/c$. Aus (14) berechnen wir dann für die Frequenz und die Wellenlänge des Photons im Laborsystem

$$f = \gamma f^*(1+\beta) > f^* \ , \quad \lambda = \frac{\lambda^*}{\gamma(1+\beta)} < \lambda^* \tag{15}$$

Die gleiche Formel gilt, wenn die Quelle ruht und der Beobachter sich ihr mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ nähert. Der Doppler-Effekt hat eine für Autofahrer unangenehme technische Anwendung in den Radarfallen der Polizei.

Bewegt sich die Quelle weg vom Beobachter, so ist $p_\parallel^* = -p_{ph}^* = -\hbar\omega^*/c$, und es ergibt sich entsprechend

$$f = \gamma f^*(1-\beta) = f^* \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < f^* \ , \quad \lambda = \lambda^* \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \lambda^*$$

Dies ist von hoher Relevanz für die Astronomie: aus der *Rotverschiebung* der Spektrallinien lernt man, dass entfernte Galaxien mit hoher Geschwindigkeit von uns wegfliegen.

3 Elementarteilchen und Beschleuniger

3.1 Relativistische Kinematik von Teilchenreaktionen

In der Teilchenphysik kommt die spezielle Relativitätstheorie voll zur Geltung. Die Äquivalenz von Energie und Masse $E = mc^2$ zeigt sich bei Teilchenreaktionen wie

$$e^+ + e^- \to \tau^+ + \tau^-$$

wo im ersten Schritt die Annihilation eines hochenergetischen Positrons und Elektrons in ein (virtuelles) Photon abläuft und im zweiten Schritt die Umwandlung dieses Photons in ein Paar von τ-Leptonen. (Die τ-Leptonen sind die schwersten Verwandten der Elektronen mit einer Ruhemasse $m_\tau = 3477 m_e$). Damit der Prozess energetisch erlaubt ist, müssen die Energien von Elektron und Positron jeweils mindestens den Wert $m_\tau c^2 = 1777$ MeV haben. Treffen die Teilchen mit dieser Energie frontal aufeinander und wird dabei die obige Reaktion ausgelöst, so wird die gesamte Energie der Primärteilchen (die große kinetische Energie von $2 \cdot 1776.5$ MeV und die kleine Ruheenergie von $2m_e c^2 = 1.02$ MeV) in Massenenergie $2m_\tau c^2$ umgewandelt.

Umgekehrt ist es beim Zerfall eines schweren Teilchens in leichtere Teilchen. Das sehr schwere neutrale Z^0-Teilchen, das Feldquant der neutralen schwachen Wechselwirkung, zerfällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 3.3% in ein Myonpaar

$$Z^0 \to \mu^+ + \mu^-$$

Seine Ruhe-Energie von $m_Z c^2 = 92000$ MeV ist viel größer als $2m_\mu c^2 = 212$ MeV. Bei dem Zerfall bleibt also sehr viel Bewegungsenergie übrig, die Sekundärteilchen fliegen wegen der Impulserhaltung in entgegengesetzter Richtung auseinander. Beim Z^0-Zerfall wird die Massenenergie zu nahezu 100% in kinetische Energie umgewandelt.

Der Wirkungsquerschnitt (die Wahrscheinlichkeit) für die Erzeugung der Z^0-Teilchen in der Reaktion $e^+ + e^- \to Z^0$ wird in Abb. 6 als Funktion der Energie gezeigt. Wenn die Summe der Positron- und Elektron-Energien den Wert $m_Z c^2 = 92$ GeV hat, wird ein sehr hohes, resonanzartiges Maximum beobachtet. Am Speicherring LEP sind viele Millionen von Z^0-Ereignissen registriert und analysiert worden. Das heutige *Standard-Modell* der Teilchenphysik beruht großenteils auf diesen Präzisionsdaten.

Interessant werden die Zerfälle schnell bewegter Teilchen. Die Verlängerung der im Laborsystem gemessenen Halbwertszeit ist ein wichtiger Effekt, ein anderer ist die Änderung der Impulsrichtungen der Sekundärteilchen. Als Beispiel für die Anwendung der relativistischen Kinematik möchte ich die Reaktion

$$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0$$

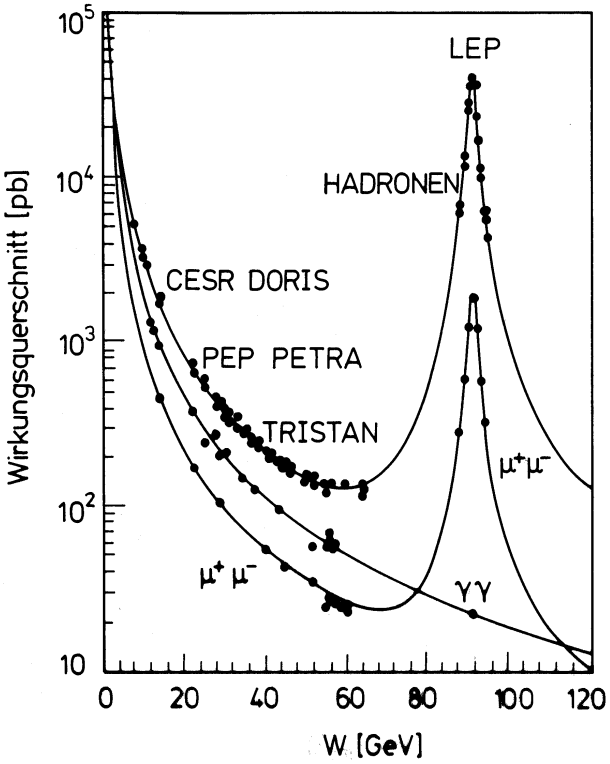

Abbildung 6: *Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung der Z^0-Teilchen in der Reaktion $e^+ + e^- \to Z^0$, gemessen am Elektron-Positron-Speicherring LEP am CERN. Das Z^0 zerfällt anschließend in Hadronen (Teilchen der starken Wechselwirkung, vorwiegend Mesonen) oder Paare von Leptonen (e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$, Neutrino plus Antineutrino).*

besprechen. Prozesse dieser Art sind in den Anfangsjahren der Teilchenphysik oft mit Flüssigwasserstoff-Blasenkammern untersucht worden. Der große Vorteil dieses Nachweisgerätes war, dass man ein fast vollständiges Bild des Ereignisses bekam. Geladene Teilchen erzeugen durch Ionisation eine Spur von feinen Dampfblasen, die photographiert werden kann. Ungeladene Teilchen sind allerdings unsichtbar.

Eine typische Blasenkammeraufnahme wird in Abb. 7 gezeigt. Das einlaufende π^- macht eine Spur, die plötzlich aufhört. Hier hat das Teilchen ein Proton des flüssigen Wasserstoffs getroffen und die Reaktion ausgelöst. Die Spuren der neutralen Sekundärteilchen sind unsichtbar, aber nach einer kurzen Flugstrecke zerfallen beide in geladene Teilchen und werden dadurch erkennbar: $\Lambda^0 \to p + \pi^-$ und $K^0 \to \pi^- + \pi^+$. Ich diskutiere den Zerfall $\Lambda^0 \to p + \pi^-$. Die beiden Spuren gehen nicht diametral auseinander, sondern schließen einen Winkel von etwa 50° ein. Wie kann man das verstehen? Wir begeben uns in das Ruhsystem S^* des Λ^0-Teilchens. Hier müssen Proton und Pi-Meson in entgegengesetzter Richtung aus-

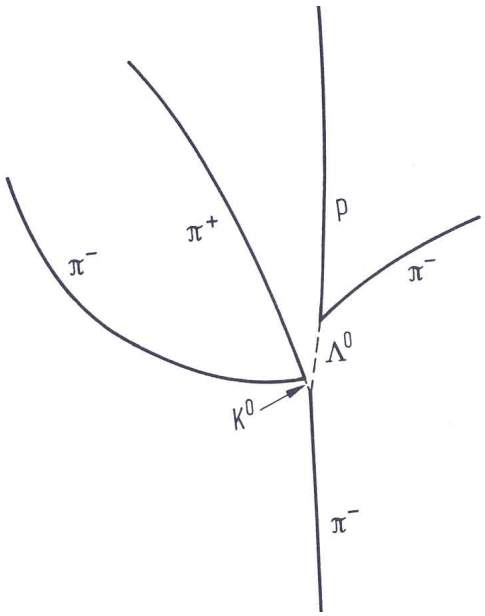

Abbildung 7: *Skizze einer Blasenkammeraufnahme der Reaktion $\pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0$ mit den anschließenden Zerfällen $\Lambda^0 \to p + \pi^-$ und $K^0 \to \pi^- + \pi^+$. Das einlaufende π^--Meson kommt von unten.*

einanderfliegen, das folgt aus dem Impulserhaltungssatz:

$$\boldsymbol{p}_p^* + \boldsymbol{p}_\pi^* = \boldsymbol{p}_\Lambda^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}_p^* = -\boldsymbol{p}_\pi^*$$

Die Energien kann man mit folgenden Formeln berechnen, die ich ohne Beweis angebe

$$E_p^* = \frac{(m_\Lambda^2 + m_p^2 - m_\pi^2)c^2}{2m_\Lambda}\,, \quad E_\pi^* = \frac{(m_\Lambda^2 + m_\pi^2 - m_p^2)c^2}{2m_\Lambda}$$

Mit Hilfe der Formel $p^2 = E^2/c^2 - m_0^2c^2$ können daraus die Beträge der Impulse berechnet werden, wie erwartet sind im Λ^0-Ruhesystem beide gleich, $p_p^* = p_\pi^* \equiv p^*$.

Der Impulsvektor des Protons $\boldsymbol{p}_p^*$ im Λ^0-Ruhesystem schließe einen Winkel θ^* mit der Flugrichtung des Λ^0 ein. Dann gilt $p_{p\,\parallel}^* = -p_{\pi\,\parallel}^* = p^* \cos\theta^*$ und $p_{p\,\perp}^* = -p_{\pi\,\perp}^* = p^* \sin\theta^*$. Die Lorentztransformation ergibt nun für den Impuls des Protons bzw. Pi-Mesons im Laborsystem

$$\begin{aligned} p_{p\,\parallel} &= \gamma(p_{p\,\parallel}^* + \beta E_p^*/c) & p_{\pi\,\parallel} &= \gamma(p_{\pi\,\parallel}^* + \beta E_\pi^*/c) \\ p_{p\,\perp} &= p_{p\,\perp}^* = p^* \sin\theta^* & p_{\pi\,\perp} &= p_{\pi\,\perp}^* = -p^* \sin\theta^* \end{aligned}$$

Die Transversalimpulse bleiben bei der Lorentztransformation unverändert, aber beide Teilchen erhalten einen zusätzlichen Longitudinalimpuls, der sich aus ihren Energien im Λ^0-Ruhesystem berechnet. In Abb. 8 wird links der Zerfall im Λ^0-Ruhesystem und rechts der Zerfall im Laborsystem gezeigt.

Eine spannende Frage ist, wie man die in der Blasenkammer unsichtbaren neutralen Teilchen überhaupt identifizieren kann. Dies geschieht über ihre Zerfälle in geladene Teilchen, beim Λ^0 über das Proton und das

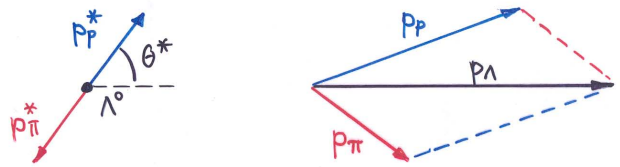

Abbildung 8: *Der Zerfall $\Lambda^0 \to p+\pi^-$, links im Ruhesystem des Λ^0-Teilchens, rechts im Laborsystem.*

π^--Meson. Aus der Krümmung von deren Spuren im Magnetfeld der Blasenkammer ergeben sich die Impulse p_p und p_π, und mit Hilfe der relativistischen Energie-Impulsrelation berechnet man die Energien E_p und E_π. Nun gilt Energie- und Impulserhaltung beim Zerfall $\Lambda^0 \to p + \pi^-$:

$$E_\Lambda = E_p + E_\pi \ , \quad \boldsymbol{p}_\Lambda = \boldsymbol{p}_p + \boldsymbol{p}_\pi$$

Um zu prüfen, ob die geladenen Teilchen aus dem Zerfall eines Λ^0 stammen, bildet man die sog. *effektive Masse* von Proton und Pi-Meson

$$m_{eff} = \sqrt{(E_p + E_\pi)^2 - (\boldsymbol{p}_p + \boldsymbol{p}_\pi)^2 c^2}\,/c^2 \qquad (16)$$

Wenn das Proton und das π^- tatsächlich beim Zerfall eines Λ^0 entstanden sind, muss $m_{eff} = m_\Lambda$ gelten. Für die in Abb. 7 gezeigte Reaktion ist das tatsächlich der Fall.

3.2 Relativitätstheorie und Teilchenbeschleuniger

In Elektron- oder Proton-Kreisbeschleunigern spielen die Existenz einer nur asymptotisch erreichbaren Maximalgeschwindigkeit ($v < c$) und die relativistische Massenzunahme ($m = \gamma m_0$) eine herausragende Rolle. In Abb. 9 sind $\beta = v/c$ und der normierte Impuls $p/(m_0 c)$ als Funktion des Lorentzfaktors aufgetragen.

Die Ablenkung im Magnetfeld hängt von der bewegten Masse ab.
Die Ablenkung der Teilchen in den Magneten wird durch die Lorentzkraft bewirkt. In einem Synchrotron hat die Kreisbahn der Teilchen einen konstanten Radius R, und das Magnetfeld muss mit wachsender Energie der Teilchen erhöht werden, damit sie immer auf derselben Bahn umlaufen[3]. Nichtrelativistisch berechnet man das erforderliche magnetische Ablenkfeld durch Gleichsetzen von Zentripetalkraft und Lorentzkraft:

$$\frac{m_0 v^2}{R} = evB \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m_0 v}{eR} \qquad (17)$$

[3]In einem Zyklotron ist das anders, dort lässt man das Magnetfeld konstant, aber der Bahnradius wächst mit der Energie der Teilchen.

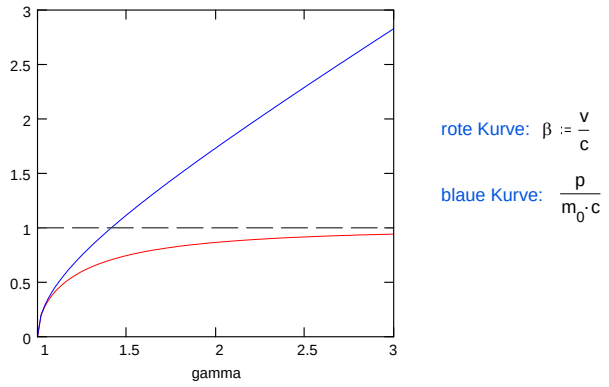

Abbildung 9: *Die normierte Geschwindigkeit $\beta = v/c$ und der normierte Impuls $p/(m_0 c)$ als Funktion des Lorentzfaktors $\gamma = E/(m_0 c^2)$.*

Die relativistische Verallgemeinerung dieser Formel lautet

$$B = \frac{p}{eR} = \frac{\gamma m_0 v}{eR} = \frac{mv}{eR} \qquad (18)$$

Das Magnetfeld muss demnach proportional zur bewegten Masse erhöht werden, damit die Teilchen auf der vorgesehenen Kreisbahn bleiben. Bei den großen Beschleunigern der Elementarteilchenphysik ist der Unterschied zwischen den Gleichungen (17) und (18) enorm. In den Protonenbeschleuniger HERA in Hamburg werden die Teilchen mit einer Energie von 40 GeV eingeschossen (Lorentzfaktor $\gamma = 43$) und auf 920 GeV beschleunigt ($\gamma = 980$). Bereits beim Einschuss haben die Protonen eine Geschwindigkeit von $v = 0.9997c$, bei der Maximalenergie ist $v = 0.9999995c$. Der Bahnradius in HERA ist etwa $R = 600$ m. Das Feld in den supraleitenden Magneten hat gemäss der relativistischen Gleichung (18) den Wert von 0.23 T bei 40 GeV und 5.2 T bei 920 GeV. Beim Betrieb von HERA werden diese Feldwerte in der Tat eingestellt und die Maschine funktioniert einwandfrei. Obwohl also die Geschwindigkeit der Protonen zwischen 40 und 920 GeV nur noch unwesentlich zunimmt, muss das Magnetfeld um den Faktor 23 ansteigen. Dieses Anwachsen ist genau proportional zur bewegten Masse $m = \gamma m_0$. Aus der nichtrelativistischen Gleichung (17) würde man übrigens ein Feld von nur 0.05 T berechnen.

Das Beispiel HERA zeigt, dass der Begriff *Beschleuniger* bei relativistischen Energien eigentlich unangebracht ist. Die Geschwindigkeit ändert sich im HERA-Ring kaum noch, die Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt}$ ist vernachlässigbar klein. In Wahrheit wird die Energiezufuhr zur Vergrößerung der bewegten Masse verwendet. Man sollte diese Maschinen eigentlich 'Massenerhöher' nennen, aber der Name Beschleuniger (engl. accelerator, franz. accelerateur, holl. versneller) hat sich so sehr

eingebürgert, dass er nicht mehr zu ändern ist.

Ist c wirklich der Grenzwert der Geschwindigkeit?
Dass c die maximale und für massive Teilchen nur im Grenzfall $\gamma \to \infty$ erreichbare Geschwindigkeit ist, wird in Kreisbeschleunigern wie HERA tagtäglich getestet. Bei jedem Umlauf durchqueren die Teilchen Hochfrequenz-Resonatoren, in denen ihre Energie erhöht wird. Die Hochfrequenz (HF) f_{HF} dieser Resonatoren wird auf ein exakt ganzzahliges Vielfaches der Umlauffrequenz f_{Uml} der Teilchen im Ring eingeregelt, damit die Teilchen nicht außer Takt geraten und möglicherweise gebremst statt beschleunigt werden. Im Protonenring von HERA beträgt $f_{Uml} = 52$ kHz und die Hochfrequenz hat den Wert $f_{HF} = 4000 f_{Uml} = 208$ MHz. Der 920 GeV-Protonenstrahl wird routinemäßig für 10 Stunden im HERA-Ring gespeichert und macht dann mehr als 10^9 Umläufe. Würde die Teilchengeschwindigkeit auch nur einen winzigen Bruchteil eines Promilles von dem berechneten Wert $v = 0.9999995c$ abweichen, so wäre die Synchronisation der Teilchen mit der Hochfrequenz in kürzester Zeit zerstört. Falls die Teilchen im Gegensatz zur Relativitätstheorie auf eine Geschwindigkeit $v > c$ gebracht werden könnten, hätte man dies mit Sicherheit längst entdeckt.

Wie nutzt man Beschleuniger optimal zur Erzeugung neuer Teilchen?
In den Anfängen der Teilchenphysik hat man sogenannte *Fixtarget-Experimente* durchgeführt, bei denen hochenergetische Teilchenstrahlen aus dem Beschleuniger ejiziert und auf ruhende Target-(Ziel)-Teilchen geschossen wurden. Diese Methode hat den Nachteil, dass nur ein Bruchteil der primären Energie zur Erzeugung neuer, schwerer Teilchen zur Verfügung steht und der Rest als gemeinsame Bewegungsenergie verlorengeht.

Ich möchte dies an einem Beispiel verdeutlichen. Bei extremem Glatteis kann ein PKW der Masse m_1 nicht mehr rechtzeitig bremsen und prallt mit der Geschwindigkeit v auf einen stehenden PKW mit $m_2 = m_1$. Nach dem Aufprall sind beide Autos stark deformiert und verhaken sich ineinander. Aufgrund des Impuls-Erhaltungssatzes befinden sie sich nicht in Ruhe, sondern rutschen beide mit der Geschwindigkeit $v' = v/2$ weiter. Die gemeinsame Bewegungsenergie ist $(m_1+m_2)v'^2/2 = 0.5 \cdot m_1 v^2/2$, d.h. 50% der kinetischen Energie des ersten Autos vor dem Stoß. Die verbleibenden 50% deformieren die Knautschzonen der Autos. Interessant wird der Zusammenstoß, wenn das erste Auto viel schwerer als das zweite ist, also z.B. ein LKW mit $m_1 = 10m_2$. Dann wird die gemeinsame Bewegungsenergie höher und die 'unelastische' Verformungsenergie hat einen geringeren Anteil an der Primärenergie.

Bei Teilchenreaktionen ist es gerade dieser 'unelastische' Energieanteil, der für die Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung steht. Wir nehmen Proton-Proton-Wechselwirkungen, wobei die einlaufenden Telchen in einem Beschleuniger auf hohe Energien gebracht werden und die Target-Teilchen die Protonen im flüssigen Wasserstoff sind, die man als ruhend ansehen kann. Die Ruhemasse des Protons ist $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg $= 938$ MeV$/c^2$. Zunächst sei die Strahlenergie gering, zum Beispiel $E_{kin} = 50$ MeV$\ll m_p c^2 = 938$ MeV. Dann hat das einlaufende Proton die Masse $m_1 = \gamma m_p \approx m_p$, das ruhende Target-Teilchen hat immer die Masse $m_2 = m_p$. Dies entspricht dem Zusammenstoß der beiden gleich schweren PKWs. Die für die Erzeugung neuer Teilchen verfügbare Energie errechnet man mit Hilfe der relativistischen Kinematik zu knapp 25 MeV, also 50% der kinetischen Energie des einlaufenden Protons.

Nun wählen wir eine sehr hohe Strahlenergie von $E = E_{kin} + m_p c^2 = \gamma m_p c^2$ mit einem Lorenzfaktor $\gamma = 100$. Die bewegte Masse des einlaufenden Teilchens ist jetzt die hundertfache Ruhemasse, $m_1 = \gamma m_p$, und wie beim Zusammenstoß von LKW und PKW steht ein geringerer Anteil der primären Energie zur Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung. In diesem Fall sind es nur 12%, während 88% als nutzlose Bewegungsenergie der Sekundärteilchen verlorengehen.

Sehr viel schlimmer wird dieser Verlust in Positron-Elektron-Wechselwirkungen. Schießen wir einen hochenergetischen Positronenstrahl auf ruhende Elektronen, um die J/Ψ-Teilchen mit einer Ruheenergie von 3100 MeV zu erzeugen, so müsste der Positronen-Strahl eine Energie von 9400 GeV ($9.4 \cdot 10^{12}$ eV) haben. Dies ist ein absurd hoher Wert, die höchste in einem Kreisbeschleuniger erzielte Elektronen- oder Positronen-Energie liegt knapp über 100 GeV. Der offensichtliche Ausweg aus diesem Dilemma ist, beide Teilchensorten auf hohe Energie zu beschleunigen und dann frontal aufeinanderzuschießen. Das ist das Prinzip der *Elektron-Positron-Speicherringe*[4] und des in Planung befindlichen Linear-Colliders. Um in einem Elektron-Positron-Speicherring die J/Ψ-Teilchen erzeugen zu können, muss jeder Strahl nur auf eine Energie von $3100/2 = 1550$ MeV beschleunigt werden. Die Summe der Elektron- und Positronenergien kann zu 100% für die Erzeugung von Teilchen genutzt werden.

3.3 Die relativistische Quantentheorie: Vorhersage der Antiteilchen

3.3.1 Die Klein-Gordon-Gleichung

Die Vereinigung von zwei der wichtigsten Theorien des frühen 20. Jahrhunderts, der speziellen Relativitätstheorie und der Quantentheorie, zu einer *relativistischen Quantentheorie* hat sich als sehr fruchtbar erwiesen

[4] Auch für andere Teilchen hat man Speicherringe gebaut: im Tevatron (Fermi-Labor bei Chicago) werden Protonen und Antiprotonen mit Energien von mehr als 900 GeV aufeinander geschossen, bei HERA sind es Protonen von 920 GeV und Elektronen oder Positronen von 27 GeV.

und zu fundamentalen neuen Einsichten geführt[5]. Die Schrödinger-Gleichung beruht auf der nichtrelativistischen Mechanik und ist auf Teilchenreaktionen bei hohen Energien nicht anwendbar. Es hat schon kurz nach der Vollendung der Quantenmechanik Versuche gegeben, eine relativistische Verallgemeinerung zu finden, man ist dabei aber auf unerwartete begriffliche Schwierigkeiten gestoßen. Um die Problematik zu erläutern, wollen wir zunächst zeigen, wie man sich die Form der Schrödinger-Gleichung plausibel machen kann, und im Anschluss daran die Methode auf den relativistischen Fall übertragen. Dies führt uns auf die Klein-Gordon-Gleichung, die einfachste relativistische Wellengleichung.

Ausgangspunkt der Quantentheorie sind die nach Max Planck und Louis de Broglie benannten Beziehungen zwischen Frequenz und Energie sowie zwischen Impuls und Wellenlänge, die die Quantennatur der elektromagnetischen Strahlung und die Wellennatur der Teilchen beschreiben:

$$E = \hbar\omega \ , \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad \Rightarrow \quad p = \hbar k$$

mit der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$. Die Welleneigenschaften der Materie werden durch eine Wellenfunktion erfasst, die für freie Teilchen eine ebene Welle ist

$$\psi(x,t) = A\exp(ikx - i\omega t)$$

A ist eine Konstante, und ich beschränke mich hier zunächst auf eine Raumdimension x. In der Quantentheorie werden physikalische Größen durch Operatoren dargestellt, die auf die Wellenfunktion wirken und deren Eigenwerte die möglichen Messwerte sind. Aus den Eigenwertgleichungen

$$E_{op}\psi = E\psi = \hbar\omega\psi \ , \quad (p_x)_{op}\psi = p_x\psi = \hbar k\psi$$

folgt für den Energieoperator und die x-Komponente des Impulsoperators

$$E_{op} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \ , \quad (p_x)_{op} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{19}$$

Für die y- und z-Komponenten des Impulsoperators gilt entsprechend

$$(p_y)_{op} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \ , \quad (p_z)_{op} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \tag{20}$$

Die nichtrelativistische Energie-Impulsbeziehung eines freien Teilches

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

schreiben wir in eine Operatorgleichung um:

$$E_{op}\psi = \frac{1}{2m}\left((p_x)_{op}^2\psi + (p_y)_{op}^2\psi + (p_z)_{op}^2\psi\right)$$

[5]Es ist bis heute nicht gelungen, die allgemeine Relativitätstheorie und die Quantentheorie zu vereinigen.

Durch Einsetzen der Operatoren ergibt sich dann die Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \tag{21}$$

Diese Betrachtung ist nicht als Herleitung der Schrödinger-Gleichung aufzufassen, sondern soll nur ihre Form plausibel machen.
Nun wird angenommen, dass die Operatoren auch im relativistischen Fall durch (19) und (20) gegeben sind, wobei der Energieoperator aber dann die Summe von kinetischer und Ruheenergie umfasst. Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet für den kräftefreien Fall

$$E^2 = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2 + m_0^2c^4$$

Einsetzen der Operatoren und der Wellenfunktion ergibt die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + m_0^2c^4\psi \tag{22}$$

Die Wellenfunktion eines freien Teilchens ist wiederum eine ebene Welle

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = A\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t)$$

Durch Einsetzen von ψ in die Klein-Gordon-Gleichung finden wir

$$\begin{aligned} \hbar^2\omega^2 &= c^2\hbar^2\boldsymbol{k}^2 + m_0^2c^4 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m_0^2c^4 \\ E &= \hbar\omega = \pm\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + m_0^2c^4} \end{aligned} \tag{23}$$

Wir müssen die befremdliche Tatsache hinnehmen, dass die Energie E sowohl positive wie negative Werte annehmen kann. Diese Energie enthält aber keinen potentiellen Energieanteil, sie ist vielmehr die Summe von Ruhe- und kinetischer Energie, also eine Größe, die in jedem Fall positiv sein muss. Die Klein-Gordon-Gleichung führt also zu unverständlichen Resultaten. Dies war der Grund, dass sie zunächst aufgegeben wurde.

3.3.2 Die Dirac-Gleichung

Die negativen Werte für E sind offensichtlich mit der Doppeldeutigkeit der Wurzel in (23) verknüpft und diese wiederum mit der zweiten Zeitableitung in der Klein-Gordon-Gleichung. Paul Dirac versuchte daraufhin, eine Gleichung zu konstruieren, die nur die erste Ableitung nach der Zeit enthält. Die Lorentz-Invarianz erfordert dann, dass auch die räumlichen Ableitungen nur in erster Ordnung vorkommen. Die Dirac-Gleichung lautet für ein freies Elektron

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \beta m_e c^2\psi \tag{24}$$

Es stellt sich heraus, dass man ψ als einen vierkomponentigen Wellenfunktionsvektor und die Koeffizienten α

und β als 4 x 4-Matrizen wählen muss.

Diracs Hoffnung, die negativen Energiewerte mit seiner relativistischen Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung vermeiden zu können, trog jedoch, denn die Dirac-Wellenfunktionen müssen auch die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, weil diese eine Konsequenz der relativistischen Energie-Impuls-Relation ist. Da Dirac sich außerstande sah, die negativen Energiezustände zu eliminieren, machte er die kühne Annahme, dass sie tatsächlich existieren, aber normalerweise sämtlich mit Elektronen besetzt sind. Nach dieser Deutung ist der Grundzustand, oft auch das *Vakuum* genannt, nicht leer, sondern enthält unendlich viele Elektronen negativer Energie. Das Pauli-Prinzip verbietet den Übergang eines 'normalen' Elektrons von seinem Zustand positiver Energie in ein negatives Energieniveau, so dass man normalerweise von den vielen negativen Niveaus nichts merkt. Durch ein γ-Quant mit einer Energie von mehr als $2m_ec^2$ könnte jedoch ein Elektron von einem negativen auf ein positives Energieniveau angehoben werden. Das verbleibende Loch im 'See' der Elektronen mit $E < 0$ sollte sich wie ein Teilchen mit positiver Ladung und positiver Energie verhalten. Aufgrund dieser Überlegungen hat Dirac die Existenz von Antiteilchen vorhergesagt und damit eine der revolutionärsten Ideen der theoretischen Physik hervorgebracht.

Das Positron als Antiteilchen des Elektrons wurde 1932 von Anderson in der Höhenstrahlung entdeckt. Das Antiproton wurde 23 Jahre später an einem eigens dafür gebauten Beschleuniger (Bevatron in Berkeley, USA) in Proton-Kern-Stößen entdeckt. Die Erzeugung von Antiprotonen durch hochenergetische γ-Strahlung gelang erstmals in einem Experiment bei DESY (Abb. 11), an dem ich als junger Doktorand beteiligt war.

Die Elektron-Positron-Paarerzeugung wird schematisch in Abb. 10 gezeigt. Das Dirac-Bild ist später mit großem Erfolg auf Halbleiter übertragen worden. Eine andere Interpretation stammt von Stückelberg und Feynman. Danach besitzen die Wellenfunktionen mit negativen Energiewerten selber keine physikalische Signifikanz, erhalten sie aber durch eine Zeitumkehr-Transformation. Sie entsprechen dann den Wellenfunktionen der Antiteilchen. Diese Deutung ist für die Teilchenphysik wesentlich besser geeignet und wird in [1] und [2] ausführlich diskutiert.

Wie wir gesehen haben, folgt die Existenz der Antiteilchen aus der Vereinigung von Relativitätstheorie und Quantentheorie. Die Dirac-Gleichung wurde ursprünglich als Wellengleichung eines einzelnen Elektrons konzipiert, ist aber im Prinzip eine Vielteilchengleichung, da bei hinreichend hohen Energien beliebig viele Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt oder vernichtet werden können. Die Antiteilchen sind in der Art der Wechselwirkung und in den Werten von Spin, Halbwertszeit und Masse identisch mit den Teilchen. Alle ladungsartigen Quantenzahlen (elektrische Ladung, magnetisches

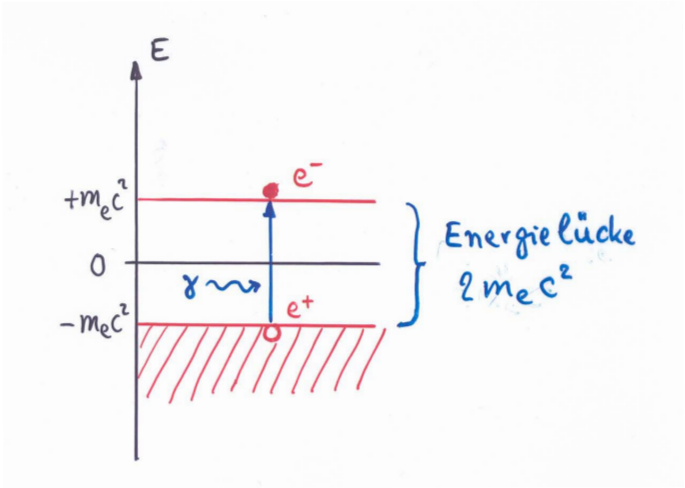

Abbildung 10: *Dirac-Bild der Antiteilchen. Gezeigt werden die positiven Energieniveaus der Elektronen mit $E \geq +m_ec^2$ und die negativen Energieniveaus mit $E \leq -m_ec^2$. Nach der Dirac-Interpretation sind die negativen Niveaus sämtlich mit Elektronen besetzt. Ein γ-Quant der Energie $E_\gamma > 2m_ec^2$ kann ein Elektron von einem Zustand negativer Energie in einen Zustand positiver Energie anheben. Das verbleibende 'Loch' im 'See' der Elektronen negativer Energie verhält sich wie eine positive Ladung mit positiver Energie. In der Blasenkammeraufnahme in Abb. 12 sind zwei Elektron-Positron-Paarerzeugungen zu sehen.*

Moment, Baryonenzahl usw.) haben das entgegengesetzte Vorzeichen.

Die Antiteilchen haben kaum eine technische Anwendung gefunden, da ihre Herstellung sehr aufwändig und teuer ist. Ausnahmen sind einige Synchrotronstrahlungsquellen, die mit Positronen statt mit Elektronen betrieben werden, und die Positronen-Emission-Tomographie (PET) der Medizintechnik. Es gibt radioaktive β^+-Präparate, die als Tracer in den Organismus eingebracht werden können. Die emittierten Positronen werden im Gewebe rasch durch Ionisation abgebremst und fangen sich dann ein atomares Elektron ein, mit dem sie in zwei γ-Quanten annihilieren (die Annihilation in ein einzelnes γ-Quant würde die Erhaltungssätze von Energie und Impuls verletzen). Diese beiden γ-Quanten fliegen diametral auseinander und haben eine Energie von jeweils $m_ec^2 = 0.51$ MeV. Sie sind leicht nachweisbar, und man kann ihren Entstehungsort sehr gut rekonstruieren.

3.3.3 Die Entdeckung des Ω-Teilchens

Ich möchte hier das berühmteste und wohl schönste Blasenkammerbild zeigen (Abb. 12), das im Jahr 1965 in Brookhaven (USA) aufgenommen wurde. Es zeigt die Erzeugung eines theoretisch postulierten Teilchens, des Ω^-. Die Entdeckung war von großer Bedeutung für das damals gerade vorgeschlagene Quarkmodell der Elementarteilchen. Auf diesem Bild ist ein Großteil der Teilchen-

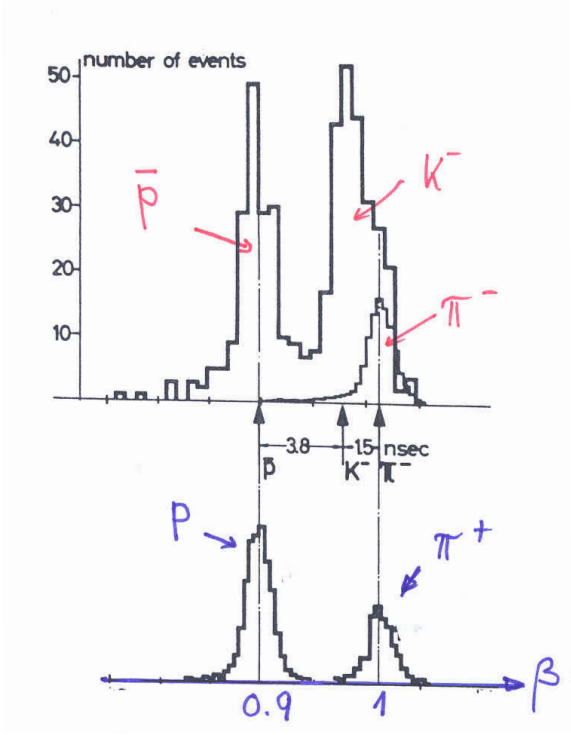

Abbildung 11: *Erzeugung von Antiprotonen ($\bar{p}$) durch hochenergetische γ-Strahlung bei DESY. In einem magnetischen Spektrometer wird die Geschwindigkeit $v = \beta c$ der Teilchen bei einem Impuls von 2 GeV/c gemessen. Oberes Bild: negativ geladene Teilchen, die Antiprotonen haben $\beta \approx 0.9$, die K^--Mesonen haben $\beta \approx 0.97$ und die π^--Mesonen $\beta \approx 1$. Unteres Bild: Kontrollmessung mit positiv geladenen Teilchen (Protonen und π^+-Mesonen).*

physik der damaligen Zeit erkennbar. Man sieht diverse Teilchenzerfälle und Erzeugungsprozesse, unter anderem auch die Elektron-Positron-Paarerzeugung durch γ-Quanten.

4 Das Magnetfeld als relativistischer Effekt

Als ich im Jahre 1958 mein Physik- und Mathematikstudium begann, wurde in der Experimentalphysikvorlesung das Magnetfeld über die Wirkungen eingeführt, die stromdurchflossene Spulen und Permanentmagnete auf Eisenfeilspäne oder Kompassnadeln ausüben. Der innere Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern blieb mir verborgen. Nun lernt man ja als Professor am meisten, wenn man selbst Vorlesungen zu halten hat. Zur Vorbereitung meiner eigenen Vorlesungen habe ich mich ausgiebig mit der neueren Literatur beschäftigt, und ganz besonders mit den Feynman-Vorlesungen über Physik [3] und dem Berkeley Physik Kurs [4]. Dabei hat mich besonders fasziniert, dass die Existenz des Magnetfelds und der Lorentzkraft aus dem Coulomb-Gesetz in

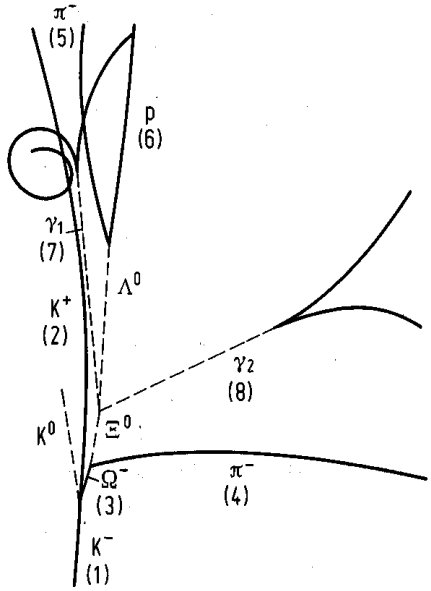

Abbildung 12: *Die Erzeugung des Ω-Teilchens in der Reaktion $K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$. Das schwere Teilchen zerfällt in einer dreifachen Kaskade: $\Omega^- \to \Xi^0 + \pi^-$, $\Xi^0 \to \Lambda^0 + \pi^0$, $\Lambda^0 \to p + \pi^-$. Das neutrale Pi-Meson zerfällt in zwei γ-Quanten, die beide in der Blasenkammer Elektron-Positron-Paare erzeugen.*

Kombination mit der speziellen Relativitätstheorie hergeleitet werden kann. Diese Faszination würde ich gern in meinem Vortrag vermitteln.

4.1 Die Lorentzkraft als relativistische Korrektur der Coulomb-Kraft

Wir stellen uns einen Stromleiter vor, in dem positive Ladungsträger nach rechts wandern und gleich viele negative Ladungsträger nach links, siehe Abb. 13. Man kann dabei an ein mit einem Elektrolyten gefülltes Glasrohr denken, in dem die positiven und die negativen Ionen die gleiche Geschwindigkeit v haben. Wir nennen ρ_+ die positive *Linienladungsdichte* (Ladung pro Längeneinheit) und ρ_- die negative Linienladungsdichte. Es gilt $\rho_- = -\rho_+$. Der Strom erhält gleiche Beiträge von den positiven und negativen Ionen und wird

$$I = \rho_+ v - \rho_- v = 2\rho_+ v$$

Im Laborsystem verschwindet die Gesamtladung, und das elektrische Feld des Leiters ist gleich null:

$$E(r) = \frac{\rho_+ + \rho_-}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0$$

Im Abstand r vom Stromleiter befinde sich eine Testladung $q > 0$. Falls die Testladung ruht, übt der Leiter also keine Coulombkraft auf sie aus, da $E(r) = 0$ ist. Nun lassen wir die Testladung mit der Geschwindigkeit u nach

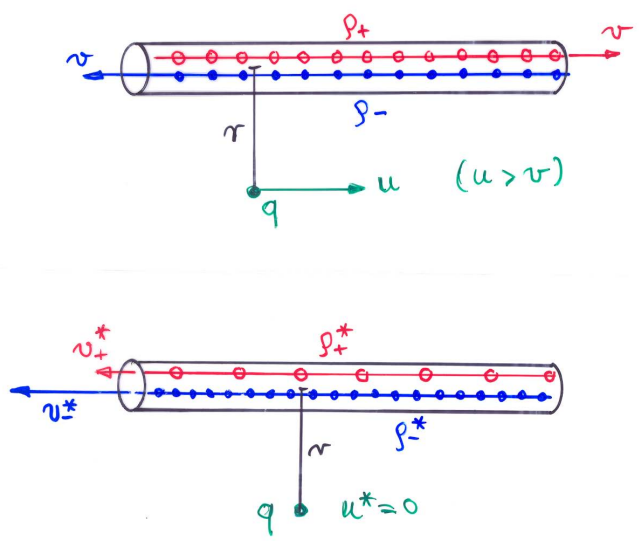

Abbildung 13: *Ein Stromleiter mit positiven und negativen Ladungsträgern. Oberes Bild: Laborsystem, die Testladung q fliegt nach rechts. Unteres Bild: Ruhesystem der Testladung. Die positiven und negativen Ladungsträger haben verschiedene Geschwindigkeiten und verschiedene Ladungsdichten. Der Unterschied zwischen ρ_+^* und ρ_-^* ist stark übertrieben dargestellt, in Wahrheit ist er sehr gering.*

rechts fliegen (ich wähle $u > v$, die Betrachtung gilt aber auch für $u \leq v$). Im Ruhesystem der Testladung haben die positiven Ionen jetzt eine andere Geschwindigkeit als die negativen Ionen. Dies ist in Abb. 13 stark übertrieben dargestellt. Gemäß Formel (8) gilt

$$v_+^* = \frac{u-v}{1-(uv)/c^2}\,, \quad v_-^* = \frac{u+v}{1+(uv)/c^2} \tag{25}$$

Anschaulich ist klar, dass $v_-^* > v_+^*$ ist. Daher gibt es verschiedene Längenkontraktionen und als Folge davon auch verschiedene Linienladungsdichten

$$\begin{aligned} \rho_+^* &= \frac{\rho_+}{\sqrt{1-(v_+^*/c)^2}} = \gamma_+\rho_+\,, \\ \rho_-^* &= -\frac{\rho_+}{\sqrt{1-(v_-^*/c)^2}} = -\gamma_-\rho_+ \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $\gamma_+ < \gamma_-$ ist und der Stromleiter im Ruhesystem von q eine negative Gesamtladungsdichte besitzt. Auf die positive Ladung q wirkt deshalb eine anziehende Kraft, die Lorentzkraft. Dies ist das wesentliche Resultat[6].

Man kann die auf die bewegte Ladung wirkende Kraft in folgender Weise herleiten. Das elektrische Feld im Ruhesystem der Testladung ist

$$\begin{aligned} E^*(r) &= \frac{\rho_+^* - \rho_-^*}{2\pi\varepsilon_0 r} \\ &= \frac{\rho_+}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v_+^*/c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(v_-^*/c)^2}}\right) \end{aligned}$$

Nun sind für die meisten Anwendungen u und v sehr viel kleiner als c. Dann gilt $v_+^* \approx u-v \ll c$ und $v_-^* \approx u+v \ll c$, und weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-(v_+^*/c)^2}} &\approx 1+\frac{v_+^{*2}}{2c^2} \approx 1+\frac{(u-v)^2}{2c^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-(v_-^*/c)^2}} &\approx 1+\frac{v_-^{*2}}{2c^2} \approx 1+\frac{(u+v)^2}{2c^2} \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v_+^*/c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(v_-^*/c)^2}} \approx -\frac{2uv}{c^2}$$

Daher wirkt auf die Testladung die Kraft

$$F^*(r) = q\,E^*(r) \approx -q\,u\,\frac{2\rho_+ v}{2\pi c^2\varepsilon_0 r} = -q\,u\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{26}$$

wobei $I = 2\rho_+ v$ und $\mu_0 = 1/(c^2\varepsilon_0)$ benutzt wurde.

Für $u \ll c$ hat die Kraft im Laborsystem denselben Wert. Wenn wir nun noch das Magnetfeld durch die Gleichung

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

einführen (dies ist der bekannte Ausdruck für das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters), so kommen wir auf die bekannte Form der Lorentzkraft

$$F = -q\,uB \tag{27}$$

Wenn man die obige Herleitung genau ansieht, wird deutlich, dass die Lorentzkraft ihre tiefere Ursache in der relativistischen Längenkontraktion hat, die bei einer bewegten Testladung verschieden für die positiven und die negativen Ionen ist. Ohne Längenkontraktion wäre die Gesamtladungsdichte nicht nur im Laborsystem gleich null, sondern auch im mitbewegten System der Testladung. Es gäbe dann keine magnetische Kraft.

Es ist bemerkenswert, dass aus der relativistischen Behandlung auch die weiteren charakteristischen Eigenschaften der Lorentzkraft folgen, die sie von der elektrischen Kraft unterscheiden: ihre Proportionalität zur Geschwindigkeit der Testladung und ihre Ausrichtung senkrecht zum Magnetfeld und zur Geschwindigkeit. Weitere Beispiele sind im Band 2 des Berkeley Physik Kurses zu finden.

Die Elektrodynamik, die ihren Höhepunkt in den vier Maxwell'schen Gleichungen fand, ist eine der erstaunlichsten Theorien des 19. Jahrhunderts. Im Unterschied zur Newton'schen Mechanik ist sie voll relativistisch und

[6] Wenn man schon die magnetische Kraft kennt, ist dies Ergebnis keine Überraschung: die bewegte Ladung q stellt einen Strom dar, der parallel zum Strom im Leiter fließt und von diesem angezogen wird.

brauchte daher nach Entdeckung der speziellen Relativitätstheorie nicht modifiziert zu werden. Die Maxwell-Gleichungen sind auch heute noch relevant. Die Modifikationen kamen erst durch die Quantentheorie. Die Dirac-Gleichung erwies sich als der richtige Ausgangspunkt, um zur Quantenelektrodynamik (QED) zu kommen, die die Wechselwirkungen zwischen elektromagnetischen Feldern und relativistischen Teilchen korrekt beschreiben kann und auch Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse von Teilchen und Antiteilchen umfasst. Das anschauliche und mathematische Hilfsmittel dafür sind die Feynman-Graphen, siehe etwa [2].

4.2 Relativistische Transformation elektrischer und magnetischer Felder

Elektrische und magnetische Felder sind eng miteinander verkoppelt. Eine ruhende Ladung erzeugt ein rein elektrisches Feld, eine bewegte Ladung erzeugt ebenfalls ein elektrisches Feld, aber da sie einen Strom darstellt, erzeugt sie außerdem ein magnetisches Feld. Ein ruhender Permanentmagnet erzeugt ein rein magnetisches Feld, ein bewegter Permanentmagnet entspricht im Laborsystem einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld, welches aufgrund des Induktionsgesetzes ein elektrisches Wirbelfeld induziert.

Diese aus der Elektrodynamik bekannten Erscheinungen weisen darauf hin, dass bei der Lorentztransformation die elektrische und magnetische Feldstärke nicht separat transformiert werden, sondern dass beide miteinander verkoppelt sind. Die Transformation des elektromagnetischen Feldes von einem Bezugssystem in ein anderes ist in der Tat viel komplizierter als die Transformation von Zeit und Ort oder von Energie und Impuls.

Ich möchte hier nur andeuten aber nicht im Einzelnen ausführen, wie man dies Problem angeht. Einfacher als die elektromagnetischen Felder sind die Potentiale. Man kann das elektrische und das magnetische Feld durch ein *skalares Potential* Φ und ein *Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$ darstellen:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\,, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{28}$$

Die Potentiale werden nun in gleicher Weise Lorentztransformiert wie Energie und Impuls. Aus den transformierten Potentialen kann man danach mit Gl. (28) die Felder im neuen Bezugssystem berechnen.

Eine Ladung q, die mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung fliegt, hat in ihrem Ruhesystem nur ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}^*$ und kein Magnetfeld. Die elektrischen und magnetischen Felder im Laborsystem findet man durch Lorentztransformation des skalaren Potentials und des Vektor-Potentials und Anwendung der Gl. (28)

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^* & B_x &= 0 \\ E_y &= \gamma E_y^* & B_y &= -\gamma \frac{v}{c^2} E_z^* \\ E_z &= \gamma E_z^* & B_z &= \gamma \frac{v}{c^2} E_y^* \end{aligned} \tag{29}$$

Bemerkenswert ist, dass die elektrische Feldkomponente E_x parallel zur Flugrichtung gleich bleibt, während die dazu senkrechten y- und z-Komponenten um den Faktor γ vergrößert werden. Das Magnetfeld bildet ringförmige Feldlinien um die Flugrichtung. Zwei Beispiele sollen diskutiert werden.

Feld eines Proton-Pakets im HERA-Ring.
In einem Speicherring sind die Teilchen nicht gleichmäßig um den Ring verteilt, sondern in kurzen Paketen konzentriert. Im Protonen-Speicherring von HERA laufen 200 dieser Pakete um, die eine Länge $L \approx 30$ cm und einen Durchmesser von weniger als 1 mm haben. In einem Paket befinden sich N Protonen (typisch ist $N = 5 \cdot 10^{10}$). Bei 920 GeV ist die Länge im mitbewegten Bezugssystem der Protonenpakete sehr groß : $L^* = \gamma L \approx 300$ m, aber der Durchmesser bleibt unverändert klein, weniger als 1 mm. Das elektrische Feld dieses sehr langen und dünnen Ladungspakets ist radial nach außen gerichtet und durch folgende Formel gegeben

$$E_r^*(r) = \frac{Ne}{2\pi\varepsilon_0 r\, L^*} \tag{30}$$

Das Magnetfeld ist null im mitbewegten System. Nach den Gleichungen (29) wird das radiale elektrische Feld im Laborsystem

$$E_r(r) = \gamma E_r^*(r) = \frac{\gamma N e}{2\pi\varepsilon_0 r\, L^*} = \frac{Ne}{2\pi\varepsilon_0 r\, L}$$

Zusätzlich gibt es ein Magnetfeld mit kreisförmigen Feldlinien um die Flugrichtung. Wenn man die Formeln (29) benutzt und noch einige Umrechnungen vornimmt, kommt man zu dem Ausdruck

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,,$$

was dem bekannten Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes entspricht.

Feld eines hochrelativistischen Teilchens.
Besonders interessant wird das elektrische Feld eines hochrelativistischen Teilchens ($\gamma \gg 1$), das in Abb. 14 dargestellt ist. Je größer γ wird, umso stärker sind die Feldlinien um eine Kreisscheibe senkrecht zur Flugrichtung konzentriert.

4.3 Spin und magnetisches Moment des Elektrons

Die Dirac-Gleichung sagt nicht nur Antiteilchen voraus, sondern macht noch weitere tiefgehende Aussagen über Beobachtungen, die in der nichtrelativistischen Quantentheorie unverständlich blieben. Dies betrifft den Spin (Eigendrehimpuls) des Elektrons von $\hbar/2$ und sein 'anomales' magnetisches Moment[7]. Zur korrekten Beschreibung

[7] Ein magnetisches Moment bedeutet, dass sich das Elektron wie ein kleiner Stabmagnet mit Nord- und Südpol verhält.

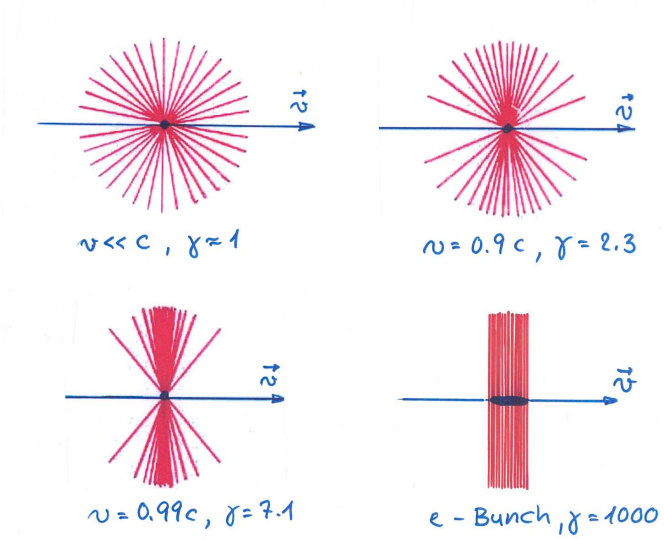

Abbildung 14: *Die elektrischen Feldlinien eines Elektrons in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit. Oben links:* $v \ll c$, $\gamma = 1$. *Oben rechts:* $v = 0.9c$, $\gamma = 2.3$. *Unten links:* $v = 0.99c$, $\gamma = 7.2$. *Unten rechts: Feld eines hochrelativistischen Elektronenpakets mit* $\gamma = 1000$. *Die Feldlinien sind praktisch senkrecht zur Geschwindigkeit.*

der Atomstruktur und der optischen Spektren müssen diese Eigenschaften des Elektrons berücksichtigt werden. Das wurde anfangs in der Weise gemacht, dass man in die Schrödinger-Gleichung quasi 'per Hand' zusätzliche Terme einführte. Erst die Dirac-Gleichung hat die theoretische Rechtfertigung dafür erbracht. Ein Teilchen der Ladung e und Ruhemasse m_0, dessen Wellenfunktion dieser Gleichung genügt, hat notwendigerweise einen Spin von $\hbar/2$ und ein magnetisches Moment

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m_0} \tag{31}$$

Für das Elektron erhält man als Moment das *Bohr'sche Magneton*

$$\mu_e = -\mu_B \ , \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \tag{32}$$

Dieser Wert ist doppelt so groß wie erwartet, wenn man sich das Elektron als geladene Kugel vorstellt, die mit dem Drehimpuls $\hbar/2$ um die eigene Achse rotiert. Das magnetische Moment dieser Kugel sollte nämlich ein halbes Bohr-Magneton betragen, während beim Elektron ein ganzes Bohr-Magneton gemessen wurde. Diese 'Anomalie' konnte erst im Rahmen der relativistischen Quantentheorie erklärt werden.

Protonen und Neutronen haben auch den Spin $\hbar/2$, aber ihre magnetischen Momente sind selbst durch die Dirac-Gleichung nicht zu erklären. Das Proton müsste gemäß der Dirac-Gleichung genau ein *Kernmagneton*

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} \tag{33}$$

haben, das Neutron als ungeladenes Teilchen das Moment null. Die Messwerte sind ganz anders:

$$\mu_p = 2.79\mu_K \ , \quad \mu_n = -1.91\mu_K$$

Diese experimentellen Resultate waren ein erster Hinweis darauf, dass Proton und Neutron eine innere Struktur besitzen. Heute wissen wir, dass sie aus drei Quarks aufgebaut sind und eine Ausdehnung von rund 1 fm $= 10^{-15}$ m haben, im Gegensatz zum Elektron, das elementar ist und dessen Radius kleiner als 0.001 fm oder vielleicht sogar null ist. Das Quarkmodell ist imstande, die merkwürdigen magnetischen Momente der Nukleonen zu erklären.

Das magnetische Moment des Protons führt in einem Magnetfeld eine *Larmorpräzession* aus. Die Messung der Larmorfrequenz $f_L = \mu_p B/(\pi\hbar)$ erlaubt die Bestimmung lokaler Magnetfelder in chemischen Verbindungen und im biologischen Gewebe. Dies ist die Grundlage der Kernspintomographie.

4.4 Elektrotechnik - angewandte Relativitätstheorie

Ich habe schon angedeutet, dass die Vorstellung, das Elektron sei eine geladene Kugel, die um die eigene Achse rotiert, in ernsthafte Widersprüche führt. Das magnetische Moment wäre dann ein halbes Bohr'sches Magneton, einen Faktor 2 kleiner als gemessen. Ein anderes Problem ist das folgende: aus den Messungen am Elektron-Positron-Speicherring PETRA in Hamburg weiß man, dass das Elektron sehr klein ist. Man kann nur eine obere Grenze für den Radius angeben, sie beträgt 10^{-18} m, d.h. ein Tausendstel des Protonradius. Um den Spin (Eigendrehimpuls) von $\hbar/2$ aufzubringen, müsste eine Kugel mit diesem Radius so schnell rotieren, dass die Umlaufgeschwindigkeit am Äquator viel größer als c wäre. Eine grobe Abschätzung dieser Geschwindigkeit erhält man aus dem Bohr'schen Atommodell. Die innerste Bahn mit der Hauptquantenzahl $n = 1$ hat den Radius $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-10}$m. Der Bahndrehimpuls ist $L = 1\,\hbar$, die Geschwindigkeit des Elektrons auf der Kreisbahn ist

$$v_e = \frac{\hbar}{m_e a_0} = 2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 0.007c$$

Würde man den Bahnradius des Elektrons um den Faktor 1000 auf $0.5 \cdot 10^{-13}$ m verkleinern, so hätte nach dieser (nichtrelativistischen) Betrachtung das Elektrons bereits die siebenfache Lichtgeschwindigkeit. Bei einem Radius von 10^{-18} m kämen noch viel absurdere Zahlen heraus.

Dies alles bedeutet, dass man die halbklassische und mechanisch geprägte Vorstellung des rotierenden kugelförmigen Elektrons aufgeben muss. Leider ist mir keine andere Modellvorstellung bekannt, die den Spin und das magnetische Moment erklären könnte.

Wenn es aber bedauerlicherweise kein anschauliches, *begreifbares* Modell des Elektron gibt, muss man sich mit den abstrakten Aussagen der Theorie begnügen. Und diese Theorie ist gut: die relativistische Quantentheorie ist imstande, die rätselhaften Beobachtungen, die in der klassischen Physik und in der nichtrelativistischen Quantenmechanik unverständlich blieben, quantitativ zu beschreiben.

Nach heutigen Wissen gibt es zwei unabhängige Ursachen für Magnetfelder: elektrische Ströme und die magnetischen Momente der kleinsten Bausteine der Materie, insbesondere der Elektronen und Quarks, die die Magnetisierung der Materie bewirken. Beide kann man mit Recht als relativistische Effekte bezeichnen. Es ist eine interessante Spekulation, ob es ohne das Relativitätsprinzip Dynamos und Elektromotoren gäbe. Ich habe da meine Zweifel und neige zu der Ansicht, dass die Elektrotechnik ganz wesentlich auf der Relativitätstheorie beruht.

5 Der Freie-Elektronen-Laser, eine relativistische Lichtquelle

5.1 Synchrotronstrahlung

In einem Kreisbeschleuniger senden relativistische Elektronen bei der Ablenkung im Magnetfeld eine intensive Strahlung aus, die man *Synchrotronstrahlung* nennt und die sich vom sichtbaren Licht bis in den Röntgenbereich erstreckt. Für die Elementarteilchenphysiker ist diese Strahlung ein großes Ärgernis, denn sie verhindert, dass man Elektronen auf gleich hohe Energien wie Protonen beschleunigen kann. Wie schon erwähnt liegt die höchste bisher erreichte Elektronenenergie bei knapp über 100 GeV (im Speicherring LEP am CERN), während die Protonen-Energien in HERA und im Tevatron mehr als 900 GeV betragen. Für viele Forschungsgebiete in Physik, Chemie, Biologie oder den Materialwissenschaften ist die Synchrotronstrahlung dagegen von großem Nutzen, und es sind zahlreiche Synchrotron-Lichtquellen gebaut worden, die die Leistung konventioneller Röntgenröhren um rund 10 Zehnerpotenzen übertreffen.

Die emittierte Strahlungsleistung eines Elektrons der relativistischen Energie E, das in einem Magnetfeld auf einer Kreisbahn mit Radius R umläuft, beträgt

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{E^4}{(m_e c^2)^4} \tag{34}$$

Die Strahlungsleistung ist umgekehrt proportional zur 4. Potenz der Ruhemasse, und dies erklärt, dass die Synchrotronstrahlung von Protonen um den Faktor $(m_e/m_p)^4 = 9 \cdot 10^{-14}$ geringer ist und fast immer vernachlässigt werden kann.

5.2 Undulatorstrahlung

In modernen Synchrotron-Lichtquellen wird die für Forschungszwecke verwendete Strahlung meistens in *Undulatormagneten* erzeugt. Diese sind periodische Anordnungen von vielen kurzen Dipolmagneten mit alternierender Polarität. Eine schematische Darstellung wird in Abb. 15 gezeigt. Den Abstand zwischen benachbarten Nordpolen

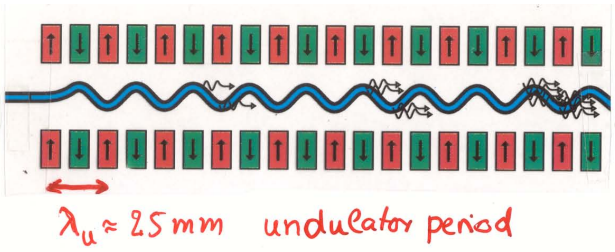

Abbildung 15: *Schematische Ansicht eines Undulatormagneten mit alternierender Polarität des Magnetfeldes. Der Abstand zwischen zwei gleichen Magnetpolen wird die Undulatorperiode λ_u genannt. Eingezeichnet ist auch die sinusförmige Bahn der Elektronen, die zur Vereinfachung in die Zeichenebene geklappt ist.*

bzw. benachbarten Südpolen nennt man die *Undulatorperiode* λ_u, sie liegt bei $\lambda_u \approx 25$ mm. Undulatormagnete sind oft mehrere hundert Perioden lang. Die Elektronen durchlaufen in dem Magneten eine wellenförmige Bahn. Die Schwingung senkrecht zur Hauptflugrichtung veranlasst die Teilchen, Strahlung zu emittieren, die bei hochenergetischen Elektronen stark nach vorn gebündelt ist. Die Wellenlänge dieses Lichtes ergibt sich zu

$$\lambda_\ell \approx \frac{\lambda_u}{\gamma^2} \tag{35}$$

Für einen Lorentzfaktor $\gamma = E/(m_e c^2) = 1000$ beträgt die Wellenlänge der *Undulatorstrahlung* $\lambda_\ell \approx 25$ nm, das entspricht ultraviolettem Licht. Wählt man $\gamma = 10000$ (Elektronenenergie 5 GeV), so wird λ_ℓ um den Faktor 100 kleiner, und man erhält Röntgenstrahlung.

Um die Beziehung (36) verständlich zu machen, muss man die Relativitätstheorie gleich zweimal heranziehen. Zunächst begeben wir uns in ein Bezugssystem S^*, das sich gleichförmig entlang der Undulatorachse bewegt und dessen Geschwindigkeit $v = \beta c$ gleich der mittleren Geschwindigkeit der Elektronen in dieser Richtung ist. Im S^*-System erscheint der Undulatormagnet wegen der Längenkontraktion um den Lorentzfaktor verkürzt, die transformierte Undulatorperiode ist $\lambda_u^* = \lambda_u/\gamma$, also 25 μm für $\gamma = 1000$. In diesem System bewegen sich die Elektronen nicht mehr in Längsrichtung, sondern führen nur noch hochfrequente transversale Schwingungen aus. Wie Hertz'sche Dipole emittieren sie dabei elektromagnetische Strahlung, deren Wellenlänge λ^* genau gleich der transformierten Undulatorperiode λ_u^* ist. Für den Beobachter im Laborsystem erscheint das oszillierende

Elektron wie eine Lichtquelle, die mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ auf ihn zufliegt. Gemäß der Formel (15) für den relativistischen Doppler-Effekt misst er als Lichtwellenlänge

$$\lambda_\ell = \frac{\lambda^*}{\gamma(1+\beta)} = \frac{\lambda_u}{\gamma^2(1+\beta)} \approx \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \ ,$$

da $\beta \approx 1$ ist.

Bei dieser Betrachtung sind mehrere Vereinfachungen gemacht worden. Eine genauere Rechnung kostet einige Mühe und liefert die folgende Beziehung zwischen Lichtwellenlänge und Undulatorperiode

$$\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \quad \text{mit} \quad K = \frac{eB_u\lambda_u}{2\pi m_e c} \tag{36}$$

Dabei ist B_u das Magnetfeld im Undulator und $K \approx 1-2$ der sogenannte *Undulatorparameter*.

5.3 Der Freie-Elektronen-Laser

In einem konventionellen Gas- oder Halbleiterlaser sind die Elektronen an atomare Energieniveaus oder an die Energiebänder im Festkörper gebunden. Durch eine Energiepumpe, beispielsweise eine Blitzlampe oder einen elektrischen Strom, wird eine Besetzungsinversion erzeugt, wobei das höhere Niveau stärker besetzt ist als das niedrigere. Zwischen diesen 'Laserniveaus' geht die stimulierte Emission vonstatten. Ein wichtiges Element des Lasers sind zwei Spiegel, zwischen denen die Strahlung immer hin- und herreflektiert wird. Der dadurch gebildete optische Resonator sorgt dafür, dass nur Licht mit genau festgelegter Richtung durch die stimulierte Emission verstärkt wird. Daher ist die entstehende Laserstrahlung eng gebündelt und hochgradig kohärent.

Im Freie-Elektronen-Laser (FEL) sind die Elektronen nicht mehr an Atome, Moleküle oder Festkörper gebunden, sondern sie sind 'frei' und fliegen mit $v \approx c$ durch das Vakuumrohr eines Beschleunigers. Typisch 10^9 bis 10^{10} Elektronen sind zu kurzen Paketen gebündelt. Die Rolle des aktiven Laser-Mediums und der Energiepumpe werden beide von den relativistischen Elektronenpaketen übernommen. Die Energie des emittierten Lichtes wird dem Teilchenstrahl entzogen.

Um diesen Vorgang zu verstehen, stellen wir uns vor, dass gemeinsam mit dem Elektronenpaket eine monochromatische Lichtwelle mit der Wellenlänge λ_ℓ in den Undulatormagneten eingeschossen wird. Die Lichtwelle beschreiben wir durch eine horizontal polarisierte elektromagnetische Welle, die sich in z-Richtung entlang der Undulatorachse bewegt[8].

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_0 \cos(k_\ell z - \omega_\ell t) \\ k_\ell &= \omega_\ell / c = 2\pi/\lambda_\ell \end{aligned} \tag{37}$$

[8] In Übereinstimmung mit der Beschleunigerkonvention wird die z-Achse in Richtung des Teilchenstrahls gelegt. Die x-Achse ist horizontal, die y-Achse vertikal.

Das elektrische Feld der Lichtwelle übt auf ein Elektron eine Kraft in x-Richtung aus

$$F_x = -eE_x$$

Die übertragende Energie pro Zeiteinheit (Leistung) ist

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = -eE_x\, v_x \tag{38}$$

Damit also Energie vom Elektron auf die Lichtwelle übertragen werden kann, muss der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ des Elektrons eine Komponente v_x in transversaler Richtung haben. Die Wellenbahn der Elektronen im Undulatormagneten ruft nun gerade diese Transversalkomponente hervor. Würden die Elektronen genau geradlinig in z-Richtung fliegen, so gäbe es keinen Energieaustausch mit der Lichtwelle.

Man muss nun noch darauf achten, dass die Lichtwelle und die wellenförmige Elektronenbahn die richtige Phase zueinander haben, denn sonst könnte es passieren, dass das Elektron der Lichtwelle Energie entzieht und sie dabei abschwächt anstatt sie zu verstärken. In Abb. 16 wird gezeigt, wie diese Phase zu wählen ist: die Transversalgeschwindigkeit des Elektrons muss in Richtung des elektrischen Feldes der Lichtwelle zeigen. Zwei Dinge sind zu beachten:

- die Lichtwellenlänge λ_ℓ ist sehr viel kleiner als die Wellenlänge λ_u der periodischen Elektronenbahn,
- das Licht fliegt geradlinig mit der Geschwindigkeit c, die Elektronen laufen auf der Wellenbahn mit der Geschwindigkeit $v = \beta c < c$

Die Lichtwelle 'gleitet' gewissermaßen unter der Elektronenwelle weg. Wie kann man dann die Phasenbedingung auf der ganzen Länge des Undulators gewährleisten? Dazu muss die Lichtwellenlänge so gewählt werden, dass in einer Halbwelle der Elektronenbahn die Lichtwelle um $\lambda_\ell/2$ vorausgleitet. Abb. 16 zeigt, dass dann die Bedingung für Energieübertragung vom Elektron zum Licht immer erfüllt ist. Die erforderliche Lichtwellenlänge ergibt sich zu

$$\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \ ,$$

sie ist identisch mit der Wellenlänge der Undulatorstrahlung. Die wichtige Konsequenz ist: mit Undulatormagneten kann man einen FEL bauen.

5.4 FEL mit hoher Verstärkung

Die Länge der Elektronenpakete (engl. electron bunches) ist viel größer als die Lichtwellenlänge. Es gibt dann immer Elektronen, die die Bedingung, dass v_x parallel zu E_x zu sein hat, erfüllen. Es gibt aber andere Elektronen, für die v_x antiparallel zu E_x ist. Die ersten erhöhen die Energie der Lichtwelle, die zweiten erniedrigen sie. Wie kommt man nun insgesamt zu einer Lichtverstärkung?

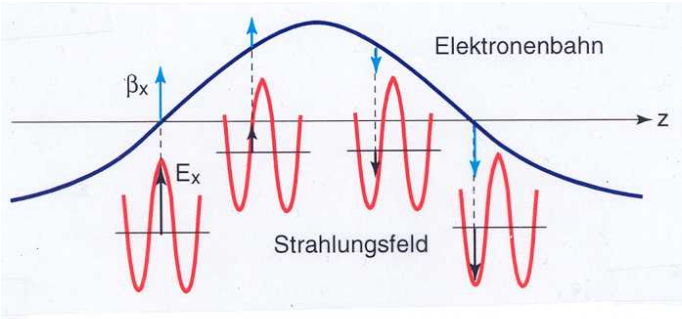

Abbildung 16: *Bedingung für kontinuierlichen Energietransfer vom Elektron zur Lichtwelle: die x-Komponente der Elektronengeschwindigkeit $v_x = \beta_x c$ muss immer parallel zur Richtung des Feldes E_x der Lichtwelle sein.*

Die Lösung liegt in der sog. selbstverstärkenden spontanen Emission (Self Amplified Spontaneous Emission SASE). Dafür braucht man sehr lange Undulatormagnete und Elektronenpakete mit hoher Ladung. Im ersten Teil des Undulators entsteht durch spontane Emission Undulatorstrahlung der Wellenlänge λ_ℓ. Die Lichtwelle wechselwirkt mit den Elektronen in der Weise, dass sich allmählich eine Ladungsdichte-Modulation entwickelt. Man nennt dies *microbunching*, ein numerische Simulation wird in Abb. 17 gezeigt. Diese Mikrobunche sind so angeordnet, dass sie Energie auf die Lichtwelle übertragen. Sie strahlen kohärent ab und bewirken eine exponentielle Verstärkung der Lichtwelle. Messungen und Rechnungen werden in Abb. 18 gezeigt.

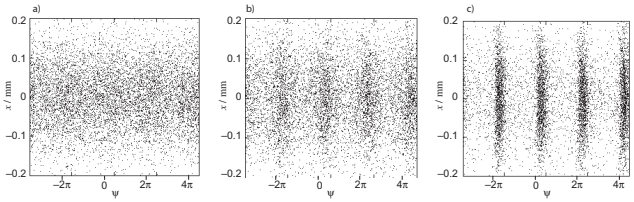

Abbildung 17: *Numerische Studie des microbunching. Linkes Bild: gleichmäßige Verteilung der Elektronen im Bunch. Mitte und rechts: Beginn und volle Ausprägung des microbunching. Die Mikrobunche haben einen Abstand von einer Lichtwellenlänge λ_ℓ.*

Die SASE-FELs werden in Zukunft eine bedeutende Rolle spielen, da man mit ihnen hochintensive Röntgenlaser bauen kann, die sich auf andere Weise nicht realisieren lassen. Durch Veränderung der Elektronenenergie kann die Wellenlänge gemäß Gl. (36) innerhalb weiter Grenzen auf jeden gewünschten Wert eingestellt werden. Die FEL-Pulse sind extrem kurz (≈ 10 fs $= 10^{-14}$ s) und erlauben z.B. die Strukturanalyse hochkomplexer Biomoleküle, die mit existierenden Röntgen- und Synchrotronstrahlungsquellen nicht durchführbar

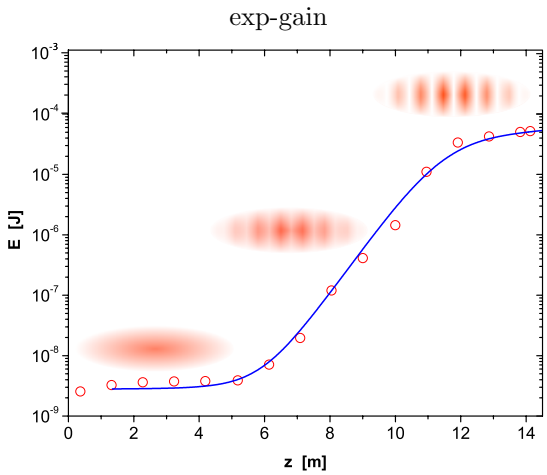

Abbildung 18: *Das exponentielle Anwachsen der Energie der FEL-Strahlung als Funktion der Länge des Undulatormagneten. Die Daten (offene Kreise) stammen vom Ultraviolett-FEL bei DESY bei einer Wellenlänge $\lambda_\ell = 100$ nm. Das sich entwickelnde microbunching ist schematisch angedeutet.*

ist. Der technische Aufwand eines Röntgen-FEL ist allerdings viel höher als bei konventionellen optischen Lasern.

Literatur

[1] R.-D. Heuer, P. Schmüser, *Teilchen*, Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik Band 4, 2. Auflage, de Gruyter, Berlin 2003

[2] P. Schmüser, *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1995

[3] R. P. Feynman, *Vorlesungen über Physik*, Oldenbourg 2001

[4] Berkeley Physik Kurs Band 2, *Elektrizität und Magnetismus*, E. M. Purcell, Vieweg 1989