

Symmetrien in der Physik

Symmetrien spielen in der Teilchenphysik eine herausragende Rolle.

Was versteht man unter einer Symmetrie?

Ein System hat eine Symmetrie, wenn man eine Transformation finden kann nach der gewisse Eigenschaften des Systems unverändert sind.

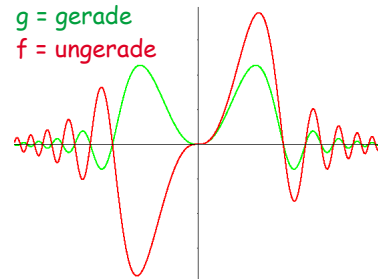
Die Kenntnis der Symmetrie eines Systems enthält bereits eine große Menge an Information über das System, z.B.

$$[f(x)]^3 = -[f(-x)]^3, [g(x)]^3 = [g(-x)]^3,$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

In der Teilchenphysik sind drei Arten von Symmetrien von besonderer Bedeutung:

- kontinuierliche Raum-Zeit-Symmetrien
- diskrete Symmetrien
- kontinuierliche dynamische Symmetrien



Kontinuierliche Raum-Zeit-Symmetrien

Beispiel aus der klassischen Mechanik:

Systemverhalten wird beschrieben durch die Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$ mit den verallgemeinerten Koordinaten:

$q (q_i, i = 1 \dots n)$ und $p (p_i, i = 1 \dots n)$

Aus dem Prinzip der minimalen Wirkung:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, p, t) dt = 0 \text{ folgen die}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

In einem abgeschlossenen System gilt:

- Homogenität der Zeit:

$$H(q, p, t + dt) = H(q, p, t) = H(q, p) \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} = 0$$

d.h. **Energieerhaltung**

- Räumliche Translationsinvarianz unter der Operation $q \rightarrow q + \delta q$

$$H(q, p, t) \rightarrow H(q + \delta q, p, t) =$$

$$H(q, p, t) + \delta q \frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t)$$

Damit $H(q, p, t) = H(q + \delta q, p, t)$ unabhängig von δq ist folgt daraus

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} = 0,$$

d.h. **Impulserhaltung**

Kontinuierliche Raum-Zeit-Symmetrien

- Isotropie des Raumes:

Systemeigenschaften bleiben unverändert, wenn das ganze System gedreht wird.

Drehung wird beschrieben durch Drehwinkel:

$$\delta \vec{\phi} = (\delta \phi_x, \delta \phi_y, \delta \phi_z)$$

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{\phi} \times \vec{r} \text{ und } \delta \vec{p} = \delta \vec{\phi} \times \vec{p}$$

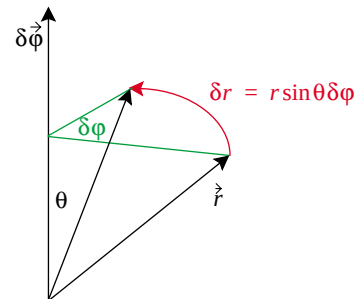
$$H(\vec{q}, \vec{p}) \equiv H(\vec{q} + \delta \vec{q}, \vec{p} + \delta \vec{p})$$

$$= H(\vec{q}, \vec{p}) + \delta \vec{q} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} + \delta \vec{p} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

$$0 = \delta \vec{q} \cdot \dot{\vec{p}} + \delta \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} = (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{p}} + (\delta \vec{\phi} \times \vec{p}) \cdot \dot{\vec{q}} =$$

$$\Rightarrow \delta \vec{\phi} ((\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) + (\dot{\vec{p}} \times \vec{r})) = \delta \vec{\phi} ((\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) + (\dot{\vec{p}} \times \vec{r})) = \delta \vec{\phi} \frac{d\vec{L}}{dt}$$

mit $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, d.h. **Drehimpulserhaltung!**



Noether Theorem

Emmy Noether veröffentlicht 1917 Theorem über den Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen: **Jede Symmetrie in der Natur zieht einen Erhaltungssatz nach sich; umgekehrt bedeutet jeder Erhaltungssatz eine zugrundeliegende Symmetrie.**

Transformation/Symmetrie	Erhaltungsgröße
Lorentzinvarianz	Masse
Räumliche Translation	Impuls
Zeitliche Translation	Energie
Räumliche Rotation	Drehimpuls
Räumliche Spiegelung	Parität
Isospin Rotation	Isospin
Ladungsspiegelung	C-Parität
Eichtransformation	Ladung
	Baryonen-Zahl
	Lepton-Zahl



Emmy Noether

Eigenschaften von Symmetrieeoperationen

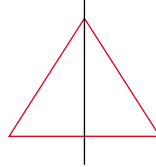
Beispiel gleichseitiges Dreieck: Rotationen um $\pm 120^\circ$ sowie Spiegelungen an den Achsen führen das Dreieck in sich selber über. Allgemein bildet die Menge der Symmetrieeoperationen eine mathematische Gruppe mit den folgenden Eigenschaften:

1. Abgeschlossenheit: $R_i, R_j \text{ Element} \Rightarrow R_k = R_i R_j$ gehört ebenfalls dazu
2. Einselement: $IR_i = R_i I = R_i$ für alle R_i
3. Inverses: zu jedem R_i gibt es R_i^{-1} , so daß gilt $R_i R_i^{-1} = I$
4. Assoziativität: $R_i (R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$

Gruppen sind im allgemeinen nicht kommutativ: $R_i R_k \neq R_k R_i$

Die meisten der für die Physik interessanten Gruppen sind Matrizingruppen, die wichtigsten sind:

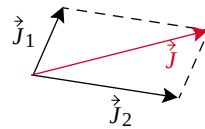
Gruppenname	Matrizen der Gruppe
$U(n)$	$n \times n$ unitär ($U^\dagger U = 1$)
$SU(n)$	$n \times n$ unitär mit Determinante=1
$O(n)$	$n \times n$ orthogonal ($O^T O = 1$)
$SO(n)$	$n \times n$ orthogonal mit Determinante=1



Addition von Drehimpulsen

Wie addieren sich zwei Drehimpulse $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$?

- Klassisch: Addition der einzelnen Komponenten
- Quantenmechanik: nur Betrag und eine Komponente können gleichzeitig gemessen werden $|J_1 m_1\rangle + |J_2 m_2\rangle = ? |J m\rangle$



Der erlaubten Wertebereich ist: $m = m_1 + m_2$
 $J = |J_1 - J_2|, |J_1 - J_2| + 1, \dots, J_1 + J_2 - 1, J_1 + J_2$ z.B.

1. Mesonen sind gebundene $q\bar{q}$ -Zustände. Im Grundzustand ist der Bahndrehimpuls $L=0$. Beitrag der Spins zum Gesamtdrehimpuls?

- $J = 1/2 - 1/2 = 0$ d.h. Spin 0: **Pseudoskalare Mesonen** π, η, K, D
- $J = 1/2 + 1/2 = 1$ d.h. Spin 1: **Vektormesonen** $\rho, \omega, K^*, D^*, \dots$

2. Baryonen sind gebundenen qqq -Zustände. Grundzustand $L=0$. Spinbeitrag: $(qq)q$

$$J = 0 + 1/2 = 1/2$$

$\Rightarrow$ mögliche Kombinationen: $J = 1 - 1/2 = 1/2$ Allgemein: **Clebsch-Gordan Koeffizienten**

$$J = 1 + 1/2 = 3/2$$

$$|J m\rangle = \sum_{J_1, J_2} C_{m m_1 m_2}^{J J_1 J_2} |J_1 m_1\rangle |J_2 m_2\rangle \text{ mit } m_1 + m_2 = m \text{ Bedeutung: Wahrscheinlichkeit, dass } \hat{J}^2$$

den Wert $J(J+1)$ ergibt für ein System, das aus $|J_1 m_1\rangle |J_2 m_2\rangle$ zusammengesetzt ist.

Drehimpuls in der Quantenmechanik

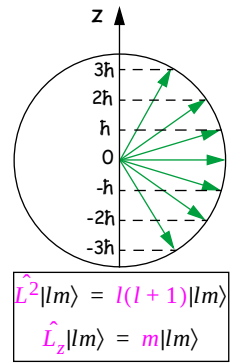
Für die quantenmechanischen Operatoren des Drehimpulses gilt:

$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$ und $[\hat{L}^2, \hat{L}_{x,y,z}] = 0$ d.h. es ist prinzipiell unmöglich alle drei Komponenten des Drehimpulses gleichzeitig zu messen. Man kann nur den Betrag L (bzw. L^2) zusammen mit einer Komponente (üblicherweise die z-Komponente) messen. Ausserdem sind die Messwerte quantisiert: so gibt es für L^2 nur die Messwerte:

$l(l+1)\hbar^2$ mit $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ Für einen bestimmten Wert von l ergibt eine Messung von L_z immer ein Ergebnis der Form $m_l \hbar^2$ wobei m_l eine ganze Zahl ist im Intervall $[-l, +l]$:

$m_l = -l, -l+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l$ d.h. $(2l+1)$ Möglichkeiten.

Bahndrehimpulse, l , sind ganzzahlig, Spins s können halb- und ganzzahlig sein.



Teilchenklassifizierung nach dem Spin

	Bosonen (ganzzahliger Spin)		Fermionen (halbzahliger Spin)	
	Spin 0	Spin 1 (2?)	Spin 1/2	Spin 3/2
elementar	-	Feldquanten	Quarks, Leptonen	-
zusammengesetzt	Pseudoskalare Mesonen	Vektormesonen	Baryonen- oktett	Baryonen- dekuplett

Beispiel

Wieder Meson-Beispiel $q\bar{q}$ -Zustände $|1/2 \pm 1/2\rangle \cdot |1/2 \pm 1/2\rangle$

Triplet: $|1 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2 1/2\rangle |1/2 -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2 -1/2\rangle |1/2 1/2\rangle$ (symmetrisch $1 \leftrightarrow 2$)
 $|1 -1\rangle = |1/2 -1/2\rangle |1/2 -1/2\rangle$

Singlett: $|0 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2 1/2\rangle |1/2 -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2 -1/2\rangle |1/2 1/2\rangle$ (antisymm. $1 \leftrightarrow 2$)

Vgl. tabellierte Werte aus dem PDG Booklet:

$1/2 \times 1/2$	1
$+1/2 + 1/2$	+1
$+1/2 - 1/2$	0
$-1/2 + 1/2$	0
$-1/2 - 1/2$	-1

Notation:

J	J	$\dots$
M	M	$\dots$

m_1	m_2	Coefficients zum Quadrat!
m_1	m_2	
.	.	
.	.	
.	.	

Man kann dies symbolisch auch schreiben als:

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

Eine 4×4 Matrix ist in einen 3er und einen 1er Block diagonalisierbar.

Clebsch-Gordan Koeffizienten (PDG)

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

$1/2 \times 1/2$ $\begin{array}{c c c} 1 & & \\ \hline +1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline +1/2 & -1/2 & 1 \\ \hline -1/2 & +1/2 & -1 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}$	$1 \times 1/2$ $\begin{array}{c c c} 3/2 & & \\ \hline +3/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +1/2 & -1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}$	$2 \times 1/2$ $\begin{array}{c c c c} 5/2 & & & \\ \hline +5/2 & 3/2 & 3/2 & \\ \hline +3/2 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}$
1×1 $\begin{array}{c c c} 2 & & \\ \hline +2 & 1 & 1 \\ \hline +1 & 1 & 1 \\ \hline +1 & 0 & 1 \\ \hline +1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}$	2×1 $\begin{array}{c c c c} 3 & & & \\ \hline +3 & 2 & 2 & \\ \hline +2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline +2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline +1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline +1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline +1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$	$3/2 \times 1/2$ $\begin{array}{c c c c c} 7/2 & & & & \\ \hline +7/2 & 5/2 & 3/2 & 3/2 & \\ \hline +5/2 & 5/2 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +3/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +3/2 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}$

Isospin

Die Ähnlichkeit von Proton und Neutron veranlasst Heisenberg 1932 zu postulieren, dass beide nur verschiedene Zustände eines Teilchens, dem Nukleon sind, die sich in der starken Wechselwirkung identisch verhalten.

Als Ursache für den geringen Unterschied in der Masse $\frac{m_n - m_p}{m_n} = \frac{939.6 - 938.3}{939.6} \approx 10^{-3}$

könnte man die unterschiedliche elektromagnetische Energie vermuten ($m_p > m_n$??).

Heisenberg entwickelt das Konzept des Isospins: das Nukleon hat Isospin $I = \frac{1}{2}$, und die dritte Komponente I_3 hat die Eigenwerte $+\frac{1}{2}$ ("up" für das Proton) und $-\frac{1}{2}$ ("down" für das Neutron). Mathematisch sind Proton und Neutron Vektoren im Isospinraum: $|1/2 \ 1/2\rangle$ und $|1/2 \ -1/2\rangle$. Die Transformationen bilden die Gruppe $SU(2)$. Die physikalische Bedeutung besteht im folgenden Postulat:

Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Rotationen im Isospinraum.

Es handelt sich hier um eine "innere" Symmetrie (Beziehung zwischen Teilchen). Gemäß dem Noether-Theorem folgt der Erhaltungssatz:

Der Isospin ist in der starken Wechselwirkung erhalten

Symmetrien in der Quantenmechanik

Korrespondenzprinzip in der Quantenmechanik: $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $\vec{p} \rightarrow \frac{1}{i}\vec{\nabla} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$

Schrödingergleichung: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ mit Wellenfunktion $\psi(x, t)$.

Der Erwartungswert eines Operators ist gegeben durch $\bar{A} = \int \psi^* \hat{A} \psi d^3x$

Beispiel: Der Operator einer räumlichen Translation $x \rightarrow x - \delta x$

$\hat{D}\psi(x, t) = \psi(x - \delta x, t) = \psi(x, t) - \delta x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = \psi(x, t) - i\delta x \cdot (\hat{p}_x \psi(x, t))$

$\Rightarrow \hat{D} = (1 - i\hat{p}_x \delta x)$ Frage: vertauschen $\hat{D}, H$?

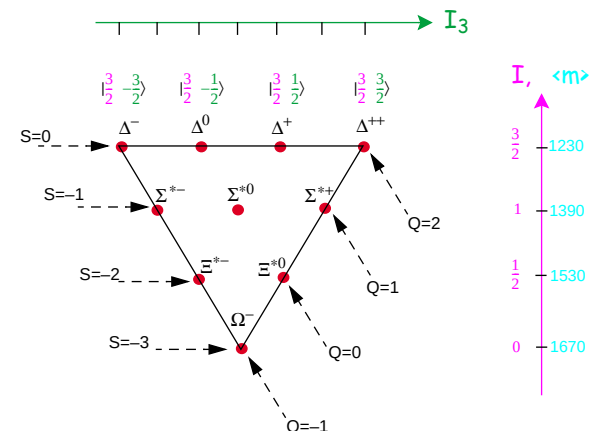
$[\hat{D}, H]\psi = \hat{D}H\psi - H\hat{D}\psi = H(x - \delta x)\psi(x - \delta x, t) - H(x)\psi(x - \delta x, t)$ d.h. $[\hat{D}, H]\psi = 0$ wenn Translationsinvarianz von H gegeben ist: $H(x - \delta x) = H(x)$. Daraus folgt ebenfalls $[\hat{p}_x, H(x)] = 0$.

Also **Translationsinvarianz impliziert Impulserhaltung!**

Allgemein gilt: wenn $[\hat{A}, H] = 0$ und $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$ folgt daraus $\frac{d}{dt} \bar{A} = \frac{d}{dt} \int \psi^* \hat{A} \psi d^3x = 0$, d.h. **A ist eine Erhaltungsgröße.**

Erfolge des Isospin-Konzepts

Erklärung der Multipllettstruktur der Hadronen: Teilchen aus einer horizontalen Reihe haben alle etwa gleiche Masse (z.B. $\frac{\delta m_\Delta}{m_\Delta} \approx 2 \cdot 10^{-3}$), sie haben alle den gleichen Isospin I und unterscheiden sich nur in $I_3 \Rightarrow$ es gibt jeweils $(2I + 1)$ Zustände in einer Reihe.



Einführung der **Hyperladung Y**: $Y = A + S$

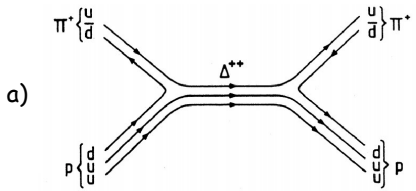
mit Baryonenzahl A und Seltsamkeit S . Damit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Teilchenladung und der dritten Komponente des Isospins:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

die als **Gell-Mann Nishijima Beziehung** bezeichnet wird.

Pion - Nukleon - Streuung $\pi N \rightarrow \pi N$

Es gibt sechs verschiedene elastische Prozesse



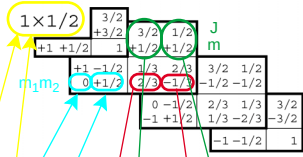
- a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ b) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$
c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$ d) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$
e) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$ f) $\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$

und vier Prozesse mit Ladungsaustausch:

- g) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$ h) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$
i) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$ j) $\pi^- + n \rightarrow \pi^0 + n$

Da Pion $I=1$ und Nukleon $I=1/2$, kann der Gesamtsospin $3/2$ oder $1/2$ sein. Entsprechend gibt es zwei unterschiedliche Amplituden $M_{3/2}$ und $M_{1/2}$.

Aus den Clebsch-Gordan-Tabellen ergeben sich folgende Zerlegungen.



- a) $\pi^+ + p$: $|1, 1\rangle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle$
- b) $\pi^0 + p$: $|1, 0\rangle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$
- c) $\pi^- + p$: $|1, -1\rangle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$
- d) $\pi^+ + n$: $|1, 1\rangle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$
- e) $\pi^0 + n$: $|1, 0\rangle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$
- f) $\pi^- + n$: $|1, -1\rangle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$

Weitere Flavour - Quantenzahlen

	Symmetrie	$\delta m/m$
Leichte Quarks: $Q=I_3+A/2$ Flavour $p: I_3 = 1/2$ $n: I_3 = -1/2$	$\nearrow$ $\nearrow$ SU(2)	sehr gut 2-3%

+ Strange Quark :	$S = -1, \quad Q = -1/3$	$\rightarrow$	SU(3)	mäßig	40%
+ Charm Quark:	$C = +1, \quad Q = 2/3$	$\rightarrow$	SU(4)	schlecht	100%
+ Bottom Quark:	$B = -1, \quad Q = -1/3$	$\rightarrow$	SU(5)	sehr schlecht	
+ Top Quark:	$T = +1, \quad Q = 2/3$	$\rightarrow$	SU(6)	???	

Hyperladung: $Y = A + S + C + B + T$ und $Q = I_3 + Y/2$

- Mesonen ($q\bar{q}$) und Baryonen (qqq) lassen sich in Multiplikts gruppieren
- beim Isospin war es noch sinnvoll anzunehmen, daß p,n verschiedene Zustände eines Teilchens (Nukleon) sind
- bereits bei Hinzunahme der Seltsamkeit werden Massensunterschiede in Multiplikts groß: $m_{\Xi} - m_p \approx 375 \text{ MeV}$. Trotzdem ist das Konzept auch hier wichtig für die Klassifizierung der Teilchen

Δ -Resonanz in der πN Streuung

a) und f) sind reine I=3/2 Reaktionen: $M_a = M_f = M_{3/2}$. Die anderen sind Mischungen der

beiden Amplituden, z.B. $M_c = \frac{1}{3}M_{3/2} + \frac{2}{3}M_{1/2}$ $M_j = \frac{\sqrt{2}}{3}M_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}M_{1/2}$. Die Wirkungsquerschnitte stehen im Verhältnis: $\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 |M_{3/2}|^2 : |M_{3/2} + 2M_{1/2}|^2 : 2 |M_{3/2} - M_{1/2}|^2$

- Wirkungsquerschnitte zeigen bei $\sqrt{s}=1230$ MeV eine klare Resonanzstruktur: Δ -Resonanz

$$I=3/2 \Rightarrow M_{3/2} \gg M_{1/2} \text{ und}$$

somit $\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$

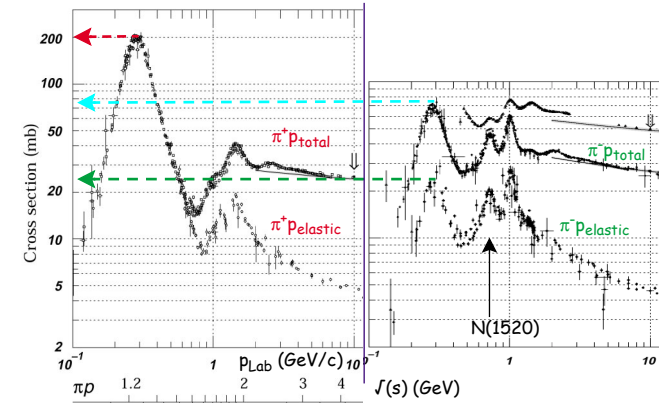
- für den totalen WQ (c+j)

$$\frac{\sigma_{tot}(\pi^+ p)}{\sigma_{tot}(\pi^- p)} = \frac{9}{1+2} = 3$$

- für den elastischen WQ

$$\frac{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p)} = \frac{9}{1}$$

- Resonanz N(1520) mit $I=1/2$
 $\Rightarrow M_{1/2} \gg M_{3/2}$ und es folgt:
 $\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 0:2:1$

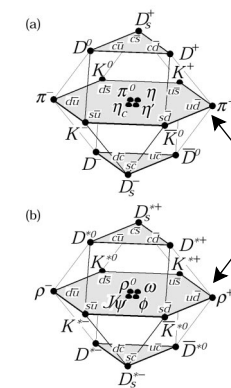


SU(4) Multipletts (u,d,s,c)

Mesonen: $q\bar{q}$ Zustände

Baryonen: ggg Zustände

Pseudoskalare



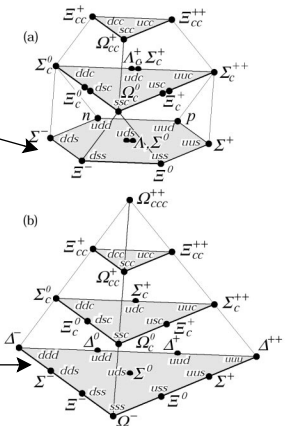
SU(3) Untergruppen
(u,d,s)

SU(3) Oktett

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

SU(3) Dekuplett

Vektor Mesonen



Quarkmassen

Warum ist Isospin eine solch gute Symmetrie, der Achtfache Weg (SU(3)) recht ordentlich und SU(5), SU(6) so schlecht?

Erklärung im Rahmen des Standardmodells: **unterschiedliche Quarkmassen**

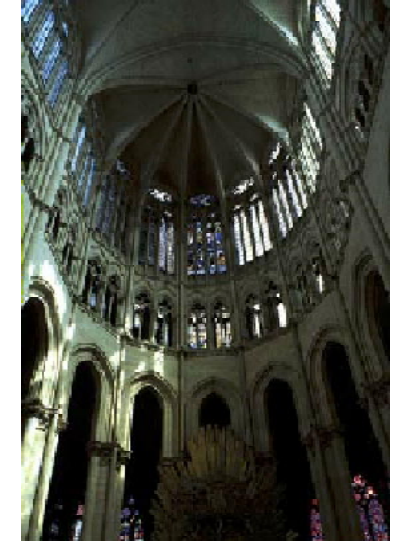
Quarkmassen sind keine direkten Observablen (Confinement). Die relevanten Werte hängen vom Modell und der jeweiligen experimentellen Situation ab!
z.B. ist die Masse von quasi-freien Quarks in der tiefunelastischen Elektron-Proton-Streuung bei HERA: $m_u \approx m_d \approx \text{einige MeV}$, dagegen im gebundenen Zustand in Mesonen oder Baryonen $\approx 300 \text{ MeV}$ (QCD Effekt).

Quarkmassen

Flavour	m_{bare} MeV	$m_{\text{eff}}/\text{MeV}$ Baryonen	$m_{\text{eff}}/\text{MeV}$ Mesonen
u	4.2	360	310
d	7.5		
s	150	540	480
c	1100	1500	
b	4200	4700	
t	170000	170000	

- Bisher gibt es keine befriedigenden Erklärungen für die Massen der Quarks und Leptonen - sie sind im Standardmodell freie, willkürliche Parameter
- Die Ursachen für die Massen sind ein zentrales Thema der theoretischen und experimentellen Teilchenphysik
- Leptonen: Neutrinooszillationen, Doppelter β -Zerfall
- Eichbosonen: Suche nach dem Higgsteilchen am LEP II, LHC, Linear Collider

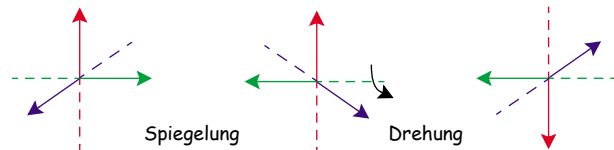
Symmetrie unter Spiegelung



Parität - Spiegelsymmetrie

Paritätsoperation:

Punktspiegelung = Spiegelung an einer Ebene + Drehung $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$



Transformationsverhalten:

Vektoren (polar):

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow -\vec{r} \\ \vec{v} &\rightarrow -\vec{v} \\ \text{grad} &\rightarrow -\text{grad} \\ \vec{E} &\rightarrow -\vec{E} \end{aligned}$$

Pseudovektoren (axial):

$$\begin{aligned} \vec{L} &\rightarrow \vec{L} \quad (\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}) \\ \vec{B} &\rightarrow \vec{B} \quad (\vec{B} \propto \vec{j} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Skalar:

$$\vec{r} \cdot \vec{r} \rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}$$

Pseudoskalar:

$$\vec{r} \cdot \vec{L} \rightarrow -\vec{r} \cdot \vec{L}$$

Parität in der Quantenmechanik

Paritätsoperator: $\hat{P}\psi(\vec{r}, t) = \psi(-\vec{r}, t)$ und $\hat{P}^2\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)$

Hamiltonoperator eines freien nichtrelativistischen Teilchens: $H = -\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} \Rightarrow [H, \hat{P}] = 0$, da

$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x}$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, d.h. H und P haben simultane Eigenwerte und Eigenfunktionen

$\hat{P}\psi(\vec{r}, t) = P_i\psi(-\vec{r}, t)$ mit $P_i^2 = 1 \Rightarrow P_i = \pm 1$ intrinsische Parität des Teilchens.

Für die Kugelfunktionen gilt: $\Psi_{lm}(\vec{r}) = R(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi)$. Die Funktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ haben die Eigenschaft: $\hat{P} \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi) \rightarrow Y_l^m(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) \Rightarrow P\Psi_{lm}(\vec{r}) = P_i(-1)^l \Psi_{lm}(\vec{r})$ mit $P_i = \pm 1$

• Parität eines Mehrteilchensystems: $\hat{P} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 = P_1 \cdot P_2 \cdot (-1)^l \cdot \psi_1 \cdot \psi_2$, d.h. Parität ist eine **diskrete und multiplikative Quantenzahl**.

• In einer Teilchenreaktion $a+b \rightarrow c+d$ gilt: $P_a \cdot P_b \cdot (-1)^{l_{\text{ein}}} = P_c \cdot P_d \cdot (-1)^{l_{\text{aus}}}$

Parität des Photons

Klassische Elektrodynamik + Korrespondenzprinzip:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

Paritätsverhalten: $\rho(\vec{r}, t) \rightarrow \rho(-\vec{r}, t)$
 $\vec{\nabla} \rightarrow -\vec{\nabla}$

Invarianz der Poissongleichung: $\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow -\vec{E}(-\vec{r}, t)$

mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ mit $\vec{A}$ = Photon in QM

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow P_\gamma \vec{A}(\vec{r}, t) \Rightarrow P_\gamma = -1$$

Parität eines Teilchen-Antiteilchen-Systems

Bisher P nur für nicht-relativistische QM diskutiert

- Teilchen und Antiteilchen werden durch verschiedene Wellenfunktionen (ψ_{e^+} und ψ_{e^-}) beschrieben, die beide der Schrödingergleichung genügen
- kein offensichtlicher Zusammenhang zwischen P_{e^+} und P_{e^-}

Relativistische Quantenmechanik: Teilchenerzeugung (vernichtung)

- dadurch sind e^+ und e^- miteinander verbunden
- aus Dirac Gleichung (für Spin 1/2) bzw Klein-Gordon Gleichung (Spin 0) folgt, dass Paritätserhaltung nur dann gegeben ist wenn:

$$P_f \cdot P_{\bar{f}} = -1 \text{ für Fermionen}$$

$$P_b \cdot P_{\bar{b}} = +1 \text{ für Bosonen}$$

Konsequenz: da Fermionen-Antifermionen nur in Paaren produziert werden, kann mit paritätserhaltenden Reaktionen nur das Produkt $P_f \cdot P_{\bar{f}}$ bestimmt werden

$\Rightarrow$ willkürliche Wahl: $P_{\text{Quark}} = -P_{\text{Antiquark}} = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{im Grundzustand } l = 0 : \quad & P(\text{Baryonen}) = (+1)^3 = +1 \\ & P(\text{Antibaryonen}) = (-1)^3 = -1 \\ & P(\text{Mesonen}) = (-1)(+1) = -1 \end{aligned}$$

Ladungskonjugation: C-Parität

Quantenfeldtheorie: zu jedem Teilchen gibt es ein Anti-Teilchen mit gleichen äußeren Quantenzahlen ($E, \vec{p}, \vec{r}, \vec{J}, \dots$) und umgekehrten inneren Quantenzahlen (Ladung, magn. Moment, $L, S, C, \dots$)

Operator:

$\hat{C}|\psi\rangle$ ändert innere Quantenzahlen und läßt äußere Quantenzahlen gleich

- meist sind Teilchen keine Eigenzustände von $\hat{C}$, z.B. $\hat{C}|\pi^+\rangle \rightarrow \pi^-$, aber $\hat{C}^2|\psi\rangle = |\psi\rangle \Rightarrow C^2=1$
- nur neutrale Bosonen können Eigenzustände von $\hat{C}$ sein: z.B. $\gamma, \pi^0, \omega^0, \phi$ nicht K^0, D^0
- C-Parität des **Photons**:
 - $\hat{C}|\gamma\rangle = -1|\gamma\rangle$ $\hat{C}$ dreht Ladungsvorzeichen, also auch $\vec{A} \Rightarrow -1$
- C-Parität des **neutralen Pions**: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$
 - $\hat{C}|\pi^0\rangle = \hat{C}|\gamma\gamma\rangle = +1|\gamma\gamma\rangle \Rightarrow +1$