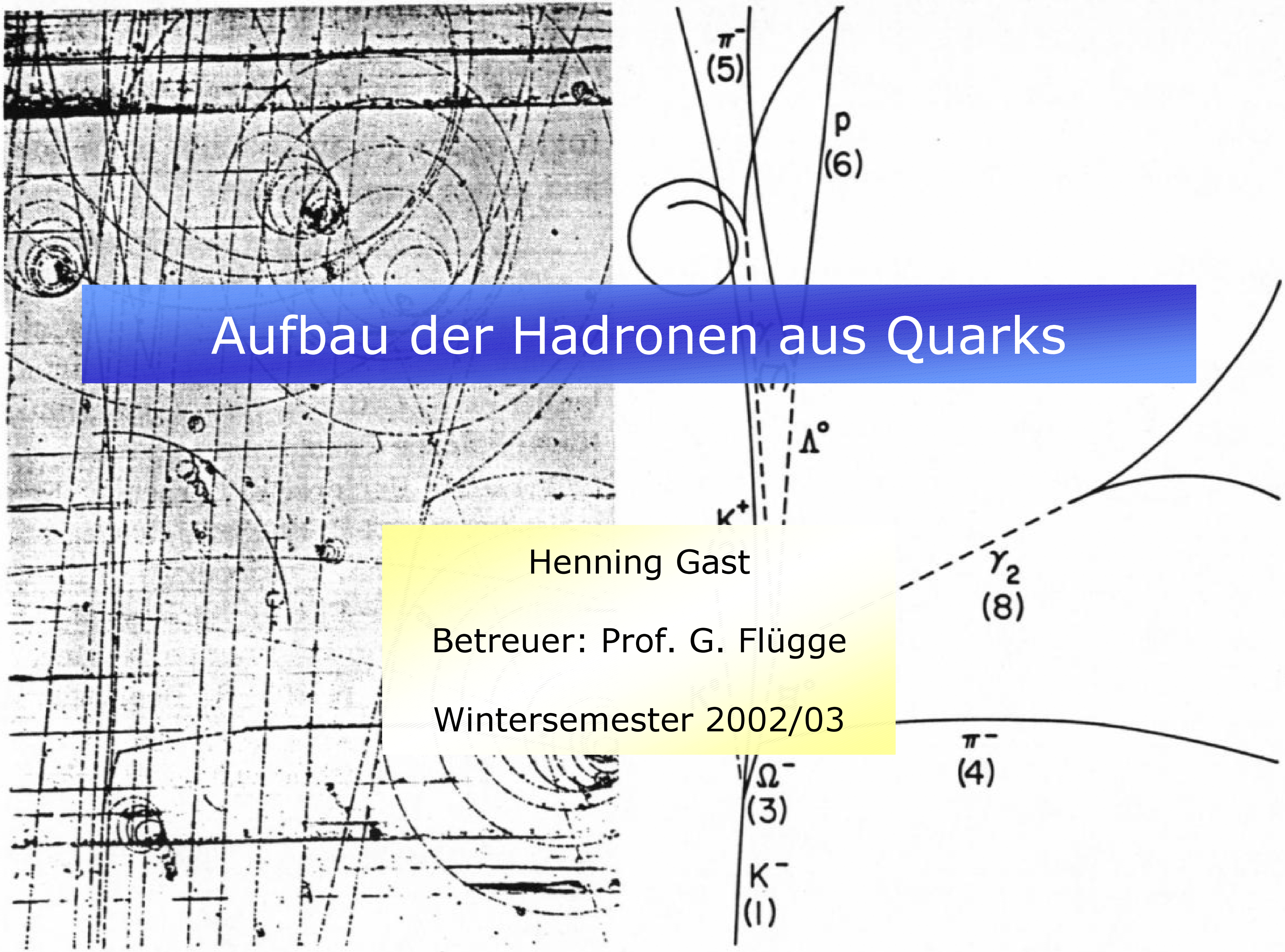
Aufbau der Hadronen aus Quarks

Henning Gast

Betreuer: Prof. G. Flügge

Wintersemester 2002/03



Übersicht

1. Einführung
2. Einige Begriffe aus der Gruppentheorie
   Liegruppen – Die Gruppen $SU(n)$ – Anwendung: Spin und $SU(2)$
3. Quantenzahlen von Elementarteilchen
   Isospin – Parität – Strangeness – Hyperladung
4. Die $SU(3)$-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
   Fundamentale Darstellungen der $SU(3)$ – Mesonen und Baryonen – Brechung der Symmetrie und Massenbeziehung – Farben der Quarks
5. Die Entdeckung des Ω^--Teilchens
6. Die Entdeckung der charm- und bottom-Quarks

Einführung: Historischer Abriss

- Zu Beginn des letzten Jahrhunderts waren zwei elementare Teilchen bekannt: Elektron und Proton
- 1932 Entdeckung von Neutron und Positron
- 1946 Nachweis des Pions in der kosmischen Strahlung
- Entwicklung immer stärkerer Teilchenbeschleuniger führt zur Entdeckung der Λ-, Σ- und Ξ-Hyperonen.
- 1964 Teilchenzoo umfasst bereits über 100 Elementarteilchen

- Einteilung zunächst nach Masse in Leptonen, Mesonen und Baryonen
- Mesonen und Baryonen bilden zusammen die Gruppe der **Hadronen.**
- Leptonen nehmen nur an schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung teil, Hadronen auch an der starken.

Das von Gell-Mann und Zweig vorgeschlagene Quarkmodell bringt Ordnung in die Vielzahl von Teilchen und enthält den Schlüssel zur inneren Struktur der Hadronen.

Einführung: Tabelle der Elementarteilchen

Name	Symbol	m/MeV	τ/s	Q	J^P	I	I_3	S
			Mesonen					
Pion	$\pi^\pm$	139,6	$2,6 \cdot 10^{-8}$	±1	0^-	1	±1	0
	π^0	135,0	$8,4 \cdot 10^{-17}$	0	0^-	1	0	0
Kaon	$K^\pm$	493,6	$1,24 \cdot 10^{-8}$	±1	0^-	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	±1
	K_s^0	497,7	$0,89 \cdot 10^{-10}$	0	0^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
	K_L^0	497,7	$5,17 \cdot 10^{-8}$	0	0^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
Eta	η	548,8	$6,09 \cdot 10^{-19}$	0	0^-	0	0	0
			Baryonen					
Nukleon	p	938,27	$> 10^{39}$	+1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0
	n	939,57	888,6	0	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Hyperonen	Λ	1115,6	$2,63 \cdot 10^{-10}$	0	$\frac{1}{2}^+$	0	0	-1
	Σ^+	1189,4	$8,0 \cdot 10^{-11}$	+1	$\frac{1}{2}^+$	1	+1	-1
	Σ^0	1192,5	$7,4 \cdot 10^{-20}$	0	$\frac{1}{2}^+$	1	0	-1
	Σ^-	1197,4	$1,48 \cdot 10^{-10}$	-1	$\frac{1}{2}^+$	1	-1	-1
	Ξ^0	1314,9	$2,90 \cdot 10^{-10}$	0	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-2
	Ξ^-	1321,3	$1,64 \cdot 10^{-10}$	-1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
	Ω^-	1672,43	$8,22 \cdot 10^{-11}$	-1	$\frac{3}{2}^+$	0	0	-3

Tabelle 1: Eigenschaften einiger Elementarteilchen

Gruppentheorie: Liegruppen

Motivation: Quarkmodell macht sich innere Symmetrien der Natur zu Nutze. Mathematische Beschreibung von Symmetrien im Rahmen der Gruppentheorie.

- Wir betrachten Gruppen G, deren Elemente durch einen Satz kontinuierlicher Parameter α dargestellt werden können: $g(\alpha)=g\in G$
- Außerdem sollen die Gruppenelemente in der Nähe des Einselementes $g(0):=1$ analytisch von den Parametern abhängen.
- Dann ist Entwicklung möglich:
$$g(\delta\alpha) = 1 + i\,\delta\alpha^a T^a + \mathrm{O}(\delta\alpha^2)$$
- Dabei sind die T^a die **Generatoren** der Gruppe:
$$T^a = -i \left.\frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^a}\right|_{\alpha=0}$$
- Unter den obigen Voraussetzungen kann man zeigen: $\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T^c$ mit den **Strukturkonstanten** f^{abc}
- Mit dieser Beziehung heißt der von den $\{T^a\}$ aufgespannte Vektorraum eine **Lie-Algebra**.

Gruppentheorie: Liegruppen (2)

- Rekonstruktion eines Gruppenelementes $g(\alpha)$ mit nicht-infinitesimalem α unter Benutzung der Abgeschlossenheit: Ausgehend vom Einselement n infinitesimale Schritte $\delta\alpha=\alpha/n$:

$$g(\alpha) = g\left(\frac{\alpha}{n}\right) g\left(\frac{\alpha}{n}\right) \ldots g\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \left(g\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)^n = \left(1 + i\frac{1}{n}\alpha^a T^a\right)^n$$

- Daraus folgt für $n \to \infty$

$$\boxed{g(\alpha) = \mathrm{e}^{i\alpha^a T^a}}$$

Gruppentheorie: Die Gruppen *SU*(*n*)

- Wir spezialisieren auf den Fall der Gruppen

$$SU(n) \equiv \{U \in \mathbf{C}^{n\times n} \mid U^+U = 1 \wedge \det U = 1\}$$

- Generation der Elemente: Ist H hermitesche $n\times n$-Matrix, so gilt

$$U = \mathrm{e}^{iH} \Rightarrow U^+U = 1$$

- Für $\det U = 1$ muss H spurfrei sein:

$$H = H^+ \Rightarrow \det U = \det \mathrm{e}^{iH} = \ldots = \mathrm{e}^{i\mathrm{Sp}H}$$

- Anzahl der reellen Parameter einer hermiteschen, spurfreien $n\times n$-Matrix:
  - je zwei für jeden Eintrag oberhalb der Diagonalen
  - je einen für jeden Eintrag auf der Diagonalen
  - letzter Eintrag auf der Diagonalen durch Spurfreiheit festgelegt

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k + n - 1 = 2\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = n^2 - 1$$

Wir haben also mit n^2-1 linear unabhängigen, hermiteschen und spurfreien $n\times n$-Matrizen einen Satz von Generatoren der *SU(n)* zur Hand.

Anwendung: Spin und *SU*(2)

Motivation: Die anhand dieses einfachen Beispiels gezeigten Begriffe werden später leicht auf das Quarkmodell und die *SU(3)* übertragen.

- Aus dem eben gezeigten folgt, dass die Pauli-Matrizen ein Satz von Generatoren der *SU*(2) sind.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Auffassung der Pauli-Matrizen als Operatoren auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ als Basis aus Eigenvektoren von σ_3 dieses Raums
- Allgemein bekannt: Beschreibung eines Teilchens mit Spin $S = \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}$ durch Linearkombination der Zustände

$$\left|S = \tfrac{1}{2}, m_s = +\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv \left|\uparrow\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{und} \left|S = \tfrac{1}{2}, m_s = -\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv \left|\downarrow\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Mit $\sigma_{1/2}$ Definition von Leiteroperatoren:

$$S_\pm = S_1 \pm iS_2$$

$$S_+\left|\uparrow\right\rangle = 0 \quad S_-\left|\uparrow\right\rangle = \left|\downarrow\right\rangle$$

$$S_+\left|\downarrow\right\rangle = \left|\uparrow\right\rangle \quad S_-\left|\downarrow\right\rangle = 0$$

Fortsetzung: Spin und $SU(2)$

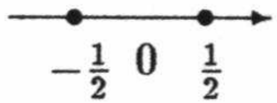
- Zwei wichtige Definitionen:

Darstellung: Gruppenhomomorphismus D: $G \to K^{n \times n}$, K Körper

Multiplett: Basis von Zuständen, die einen irreduziblen Unterraum des (Hilbert-) Raumes aufspannen, der invariant unter Anwendung der Operatoren einer Darstellung der betrachteten Symmetriegruppe ist.

Beispiel: Die Pauli-Matrizen als (fundamentale) Darstellung der $SU(2)$, die auf dem zugehörigen Multiplett $\{|\uparrow>, |\downarrow>\}$ wirken. (hier: Dublett)

Grafische Anschauung auf der m_S -Achse:



Im folgenden werden wir uns stets vor allem für die Multipletts interessieren, auf denen bestimmte Darstellungen wirken.

Spin und *SU*(2): Kopplung von Darstellungen

- Aus der Quantenmechanik bekannt: Kopplung zweier Spin ½ - Drehimpulse zu Gesamtspin *S*=1mit $m_S \in \{+1,0,-1\}$ (Triplett) oder *S*=0 mit $m_S \in \{0\}$ (Singulett):

$$|S=1, m_S=+1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \quad |S=1, m_S=0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \quad |S=1, m_S=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$|S=0, m_S=0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

- Zerlegung auf grafischem Wege:

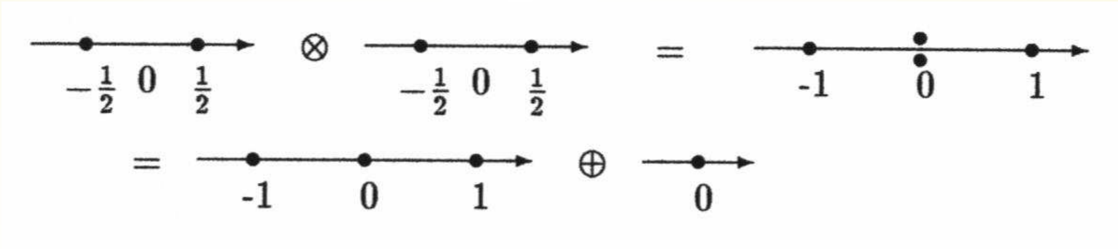


Abbildung 2: Kopplung zweier Spin $\frac{1}{2}$-Darstellungen

- Dafür schreibt man:

$$[2] \otimes [2] = [3] \oplus [1]$$

Quantenzahlen von Elementarteilchen: Isospin

- Analogie: Auf ein Elektron in einem elektrischen Feld wirkt die gleiche Kraft, egal ob es im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ ist.
  $\rightarrow$ Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung
- Blick auf Tabelle der Elementarteilchen: Proton und Neutron haben nahezu identische Massen
  $\rightarrow$ Symmetrie der starken Wechselwirkung: keine Unterscheidung zwischen diesen beiden Teilchen; erst durch elektrische Ladung
- Deshalb: Auffassung von Proton und Neutron als zwei Zustände desselben Teilchens, genannt Nukleon.
- Erfassung dieser Symmetrie durch neue Quantenzahl **Isospin *I***
- In Analogie zum Spin: Nukleon hat $I = ½$ und Proton und Neutron bilden ein Isospindublett:

$$|p\rangle \equiv \left|I = \tfrac{1}{2}, I_3 = +\tfrac{1}{2}\right\rangle \quad |n\rangle \equiv \left|I = \tfrac{1}{2}, I_3 = -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Quantenzahlen von Elementarteilchen: Isospin (2)

- In Analogie zum Spin:
  - I kann ganz- oder halbzahlige Werte annehmen
  - I^2 und I_3 sind simultan diagonalisierbar
  - I_3 kann die Werte $-I, -I+1, \ldots, I-1, I$ annehmen
  - Vertauschungsrelation $[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k$
- Erneuter Blick auf die Tabelle: Die drei Pionen sind fast gleich schwer. Daher: Auffassung als drei Zustände des Teilchens „Pion“ mit $I = 1$.
  Triplett: $|\pi^+\rangle \equiv |I=1, I_3=+1\rangle$ $|\pi^0\rangle \equiv |I=1, I_3=0\rangle$ $|\pi^-\rangle \equiv |I=1, I_3=-1\rangle$
- Definition der **Baryonenzahl *B***:
  - Mesonen haben $B = 0$
  - Baryonen haben $B = 1$ (Antibaryonen haben $B = -1$)
- Dies erlaubt Rekonstruktion der Ladung eines Zustands aus der dritten Komponente seines Isospins: $Q = e\left(I_3 + \frac{B}{2}\right)$

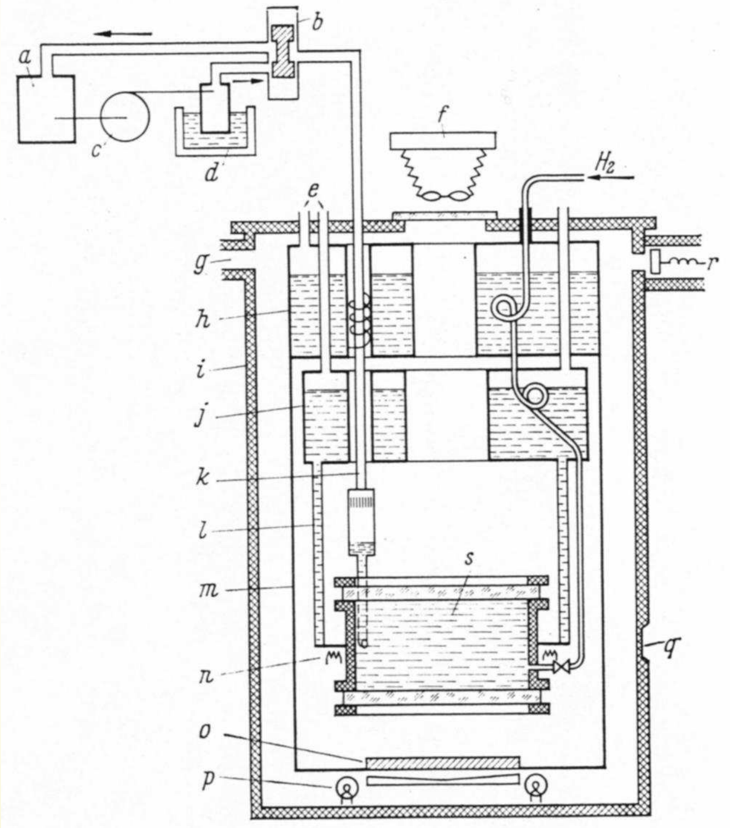
Zusammenfassung „verwandter“ Teilchen zu Isospinmultipletts

Quantenzahlen von Elementarteilchen: Parität

- **Parität**soperator P spiegelt die räumlich Koordinaten: $P\left|\vec{r}\right\rangle = \left|-\vec{r}\right\rangle$
- Zum Beispiel gilt für die Kugelfunktionen:
$$PY_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^l \, Y_l^m(\theta,\varphi)$$
- Aus der Definition von P folgt $P^2=1$, also kann P nur die EW ±1 haben.
- Wenn das Verhalten eines Systems invariant unter Raumspiegelung ist, dann vertauscht sein Hamiltonoperator H mit P: $[H,P]=0$
- QM: Zustände werden durch unitäre Operatoren transformiert, also sollte P unitär und somit auch hermitesch sein, dann ist aber P eine Messgröße.
- Also: Parität ist intrinsische Eigenschaft eines Teilchens.
- Konvention: Parität +1 für Protonen und Neutronen.
- P ist multiplikative Quantenzahl, erhalten von starker und elektromagnetischer, verletzt von schwacher Wechselwirkung.

Historischer Exkurs: Blasenkammern

- 1952 von Glaser erfunden; über Jahrzehnte eines der wichtigsten Instrumente der Teilchenphysik.
- Flüssigkeit der Temperatur T, zum Beispiel Wasserstoff, wird in einem Gefäß dicht unter dem Siedepunkt gehalten, d.h. Druck p knapp über dem Dampfdruck $p_S(T)$.
- Zuvor beschleunigte Teilchen treten durch ein dünnes Metallfenster ein.
- Wasserstoff wird periodisch durch einen Kolben expandiert, wodurch er überhitzt wird, aber:
- Kondensationskeime zur Gasblasenbildung nötig; diese werden durch Ionisation von den durchfliegenden Teilchen geliefert.
- Nach ca. 10 ms Bläschenwachstum: Beleuchtung und Foto in Stereo.

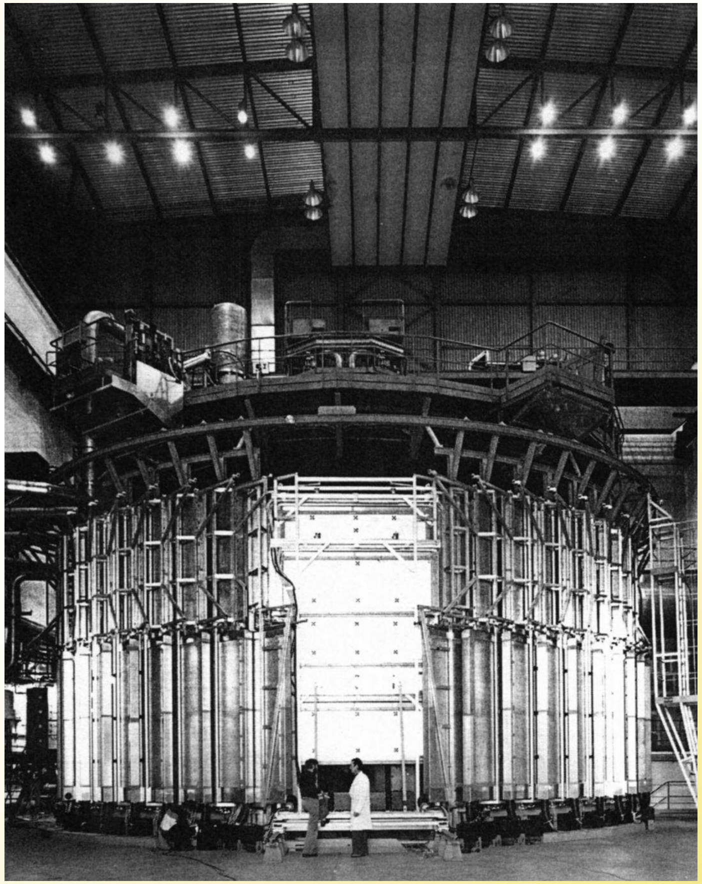


Schematischer Aufbau einer Blasenkammer

Blasenkammern (2)

Geladene Teilchen erzeugen in der Blasenkammer also Spuren.

- Homogenes Magnetfeld $\rightarrow$ Impuls der Teilchen aus Bahnkrümmung
- Bläschendichte $\rightarrow$ Energie des Teilchens
- Ausmessung der Bahn liefert Energie und Impuls $\rightarrow$ Masse des Teilchens

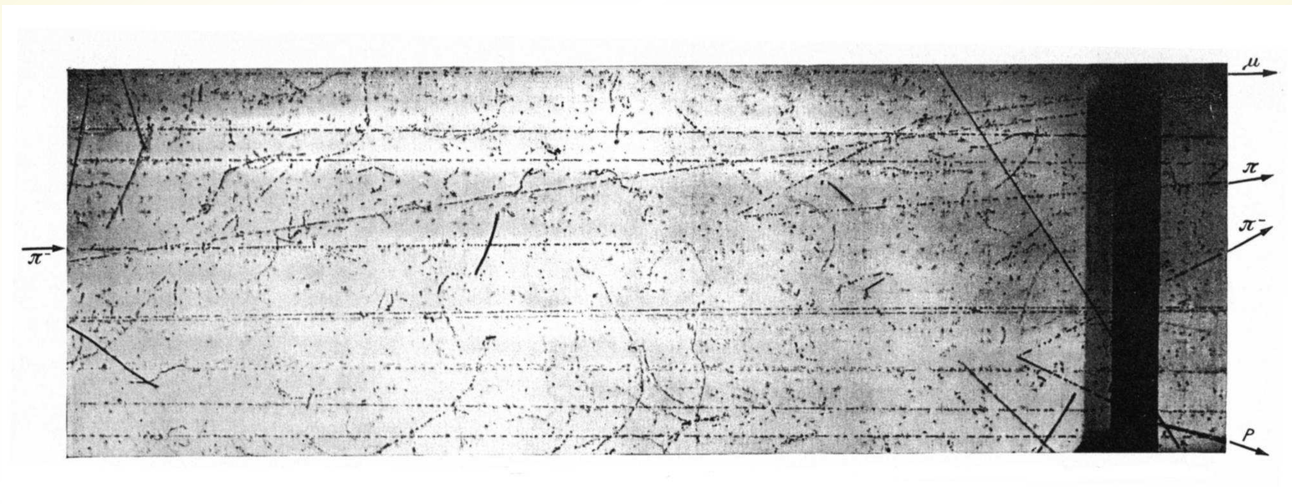


Big European Bubble Chamber (BEBC) am CERN

Quantenzahlen von Elementarteilchen: Strangeness

- Ende der 40er Jahre: Entdeckung von Teilchen (K^0_s , Λ) mit ungewöhnlichem Verhalten in der kosmischen Strahlung:
  - Erzeugung stets paarweise zusammen
  - Zerfall in Hadronen gemäß $K^0_s \to \pi^+ + \pi^-$, $\Lambda \to \pi^- + p$ mit extrem langen Lebensdauern der Größenordnung 10^{-10} s (typisch für starke oder elektromagnetische Zerfälle: 10^{-23} s bzw. 10^{-18} s)

Bsp.: $\pi^- + p \to K^0 + \Lambda$



$$K^0 \to \pi + \pi$$

$$\pi \to \mu + \bar{\nu}_\mu$$

$$\Lambda \to p + \pi^-$$

Quantenzahlen von Elementarteilchen: Strangeness (2)

- Daher muss es eine weitere Quantenzahl geben, die **Strangeness** S.
- Additiv
- Erhalten von von starker und elektromagnetischer, verletzt von schwacher Wechselwirkung.
- Auswahlregel $\Delta S = \pm 1$ für schwache Zerfälle.

Quantenzahlen von Elementarteilchen: Hyperladung

- Abermaliger Blick auf die Tabelle der Elementarteilchen:
  - Die drei Σ-Teilchen bilden ein Triplett ($I = 1$).
  - Die beiden Ξ-Teilchen bilden ein Dublett ($I = ½$).
- Um aber für diese Teilchen die korrekte Ladung zu erhalten, müssen wir die Strangeness in die letzte Formel einbeziehen und erhalten die

Gell-Mann-Nishijima-Relation

$$Q = e\left(I_3 + \frac{B+S}{2} \right)$$

- Wir definieren die neue Quantenzahl **Hyperladung**

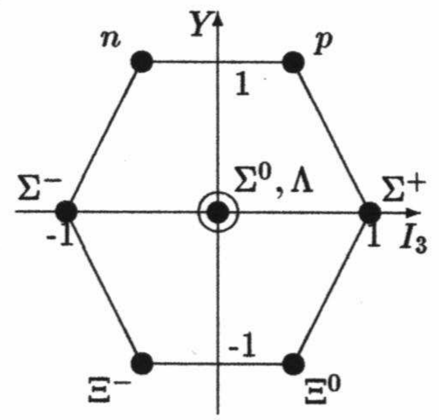
$$Y = B + S$$

- Sie kommt offenbar gleichberechtigt mit I_3 in der GMN-Relation vor.

Jetzt: Kombination von Isospin und Hyperladung, um Ordnung in den Teilchenzoo zu bringen; mit zugrunde liegender *SU(3)*-Symmetrie.

Vorschau

- Beispiel:
  Zusammenfassung der leichtesten Baryonen p, n, Σ, Ξ und Λ mit Spin-Parität $J^P = ½^+$ und Massen der Größenordnung $m = O(1000\ \mathrm{MeV})$ zu einem Oktett in der I_3-Y-Ebene:



Die $SU(3)$-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Fundamentale Darstellungen der $SU(3)$

- Wie gesehen, besteht ein Satz von Generatoren der $SU(3)$ aus acht linear unabhängigen, hermiteschen und spurfreien 3×3-Matrizen:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Im Grunde sind dies verallgemeinerte Pauli-Matrizen.

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Fundamentale Darstellungen der *SU*(3): Schiebeoperatoren

- In Analogie zur $SU(2)$ $\left(s_i = \frac{\sigma_i}{2}\right)$ definieren wir $F_i = \dfrac{\lambda_i}{2}$ und damit drei Sätze von Leiteroperatoren

  $$I_\pm = F_1 \pm iF_2 \quad V_\pm = F_4 \pm iF_5 \quad U_\pm = F_6 \pm iF_7$$

  sowie die beiden Diagonaloperatoren

  $$I_3 = F_3 \quad \text{und} \quad Y = \tfrac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

- Wegen $[Y, I_3] = 0$ existieren gemeinsame Eigenzustände $|I_3, Y\rangle$, so dass

  $$\hat{I}_3 \left| I_3, Y \right\rangle = I_3 \left| I_3, Y \right\rangle \quad \hat{Y} \left| I_3, Y \right\rangle = Y \left| I_3, Y \right\rangle$$

- Man kann leicht die Wirkung der Schiebeoperatoren berechnen:

$$V_\pm \left| I_3, Y \right\rangle \propto \left| I_3 \pm \tfrac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle$$
$$U_\pm \left| I_3, Y \right\rangle \propto \left| I_3 \mp \tfrac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle$$
$$I_\pm \left| I_3, Y \right\rangle \propto \left| I_3 \pm 1, Y \right\rangle$$

Die $SU(3)$-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Fundamentale Darstellungen der $SU(3)$: Die drei Quarks

- Um das erste der beiden nicht-trivialen fundamentalen Multipletts der $SU(3)$ anzugeben, identifizieren wir die Eigenzustände von I_3 und Y:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \equiv |u\rangle \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \equiv |d\rangle \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \equiv |s\rangle$$

- Wir nennen sie **up-Quark, down-Quark** und **strange-Quark.**
- Zum Beispiel ergibt sich für das up-Quark

$$I_3|u\rangle = \frac{\lambda_3}{2}|u\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle \quad \text{und} \quad Y|u\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\lambda_8|u\rangle = +\frac{1}{3}|u\rangle$$

$$\text{und somit } Q|u\rangle = \left(I_3 + \frac{Y}{2}\right)|u\rangle = +\frac{2}{3}|u\rangle$$

- Zuordnung von B = 1/3 für alle Quarks liefert dann folgende Werte: ($S = Y - B$)

Quark	Spin	B	Q	I_3	S	Y
u	½	⅓	⅔	½	0	⅓
d	½	⅓	–⅓	–½	0	⅓
s	½	⅓	–⅓	0	–1	–⅔

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Fundamentale Darstellungen der *SU*(3): Grafische Darstellung

- Die drei Quarks können in der Y–I_3-Ebene grafisch veranschaulicht werden, die zugehörige Darstellung heißt [3].
- Wir kennen die Wirkung der Schiebeoperatoren:
  - $U_\pm$ entlang der s-d-Linie
  - $V_\pm$ entlang der s-u-Linie
  - $I_\pm$ entlang der d-u-Linie
- Experiment: Zu jedem Hadron existiert ein Antiteilchen, deshalb wird es auch Anti-Quarks geben: $\bar{u}, \bar{d}$ und $\bar{s}$
- Ihre Quantenzahlen B, Q, I_3, S und Y haben gerade das umgekehrte Vorzeichen.
- Sie bilden das Triplett, das zu der anderen fundamentalen Darstellung der *SU*(3) gehört, sie heißt $[\bar{3}]$

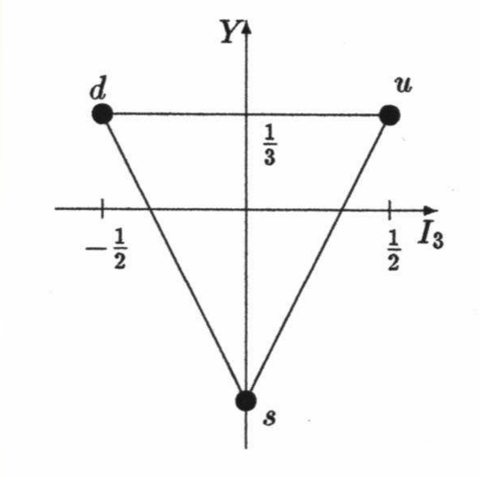


Abbildung 3: Die drei Quarks

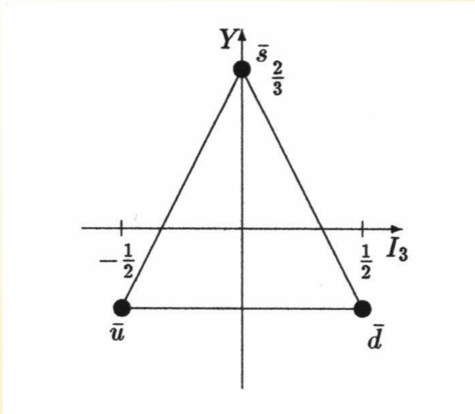
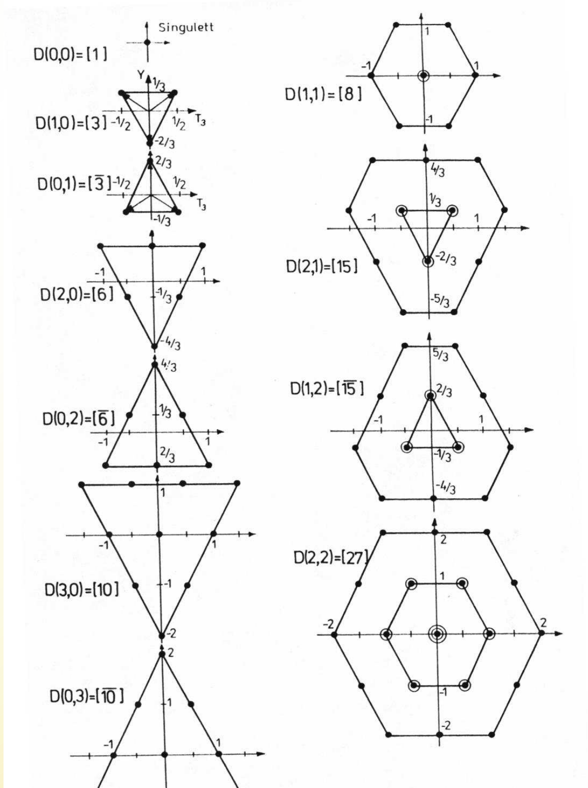


Abbildung 4: Die drei Anti-Quarks

Ordnung im Teilchenzoo: Identifizierung der Teilchen als Zustände in höherdimensionalen Darstellungen der *SU(3)* und Zuordnung zu entsprechenden Multipletts.

- Um Produkte der beiden fundamentalen Darstellungen in Summanden zerlegen zu können, benötigen wir die weiteren Darstellungen der *SU*(3).
- Hier nur Verweis auf die Ergebnisse der Gruppentheorie.



Die niedrigsten *SU*(3)-Multipletts.

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Mesonen

- Wir betrachten Zustände aus einem Quark und einem Anti-Quark und erhalten: $[3]\otimes[\bar{3}]=[8]\oplus[1]$

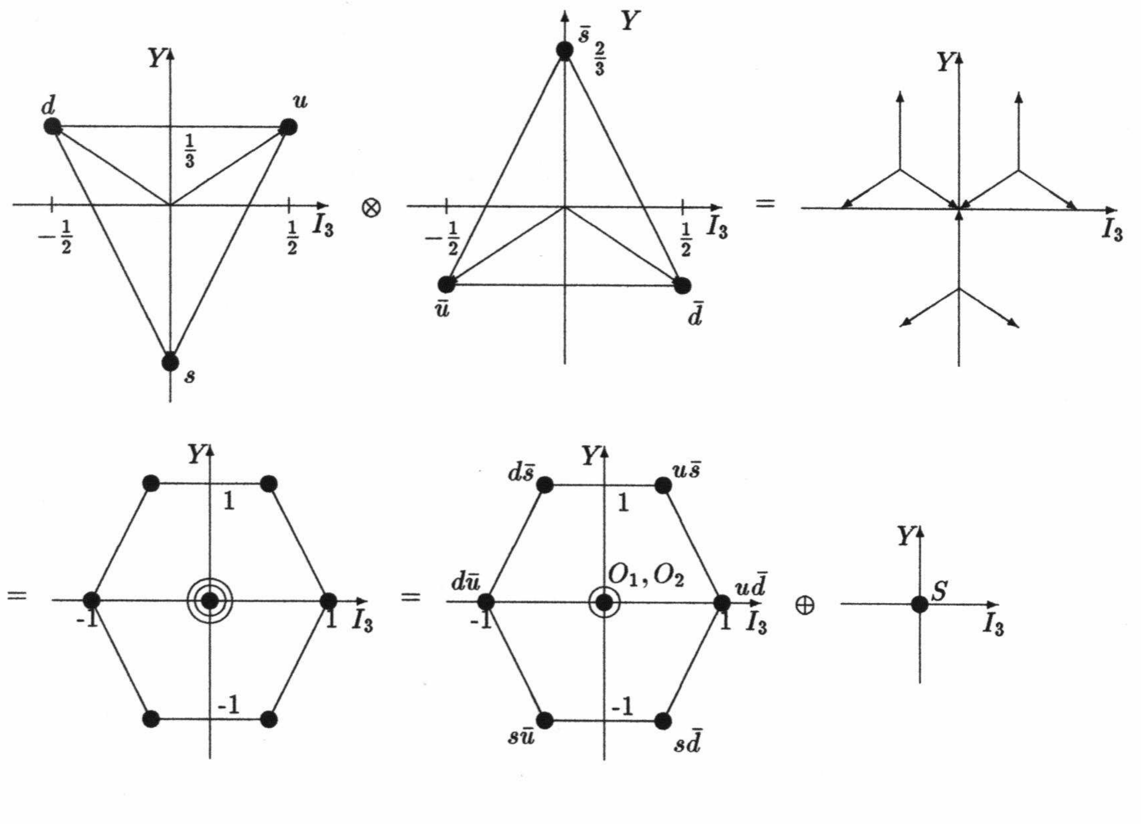


Abbildung 6: Ausreduktion des Produktes $[3] \otimes [\bar{3}]$

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Mesonen: Leichteste Zustände

- Man erhält die Zusammensetzung der Zustände gleich mit.
- Zustände im Zentrum:
  - Singulett symmetrisch in den Quarks: $S = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle\right)$
  - O_1 gehört zum Isospintriplett $I = 1$: $O_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle\right)$
  - O_2 ist orthogonal zu beiden: $O_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle\right)$
- Wir ordnen allen diesen Zuständen in der Natur vorkommende Teilchen zu:
  - Pionen bilden das Isospintriplett mit $Y = 0$
  - Kaonenduplett mit $Y = 1$: $K^0 = |d\bar{s}\rangle \quad K^+ = |u\bar{s}\rangle$
  - Kaonenduplett mit $Y = -1$: $K^- = |s\bar{u}\rangle \quad \bar{K}^0 = |s\bar{d}\rangle$
  - η-Mesonen: $O_2 \approx |\eta\rangle \quad S \approx |\eta'\rangle$
- Alle diese Teilchen haben Spin-Parität $J^P=0^-$ und Massen von der Größenordnung 500 MeV, aber es ist immerhin $m_K \approx 3m_\pi$

Die *SU(3)*-Symmetrie gilt also nicht exakt. (→ später)

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Mesonen: Angeregte Zustände

- Neben diesen leichtesten Mesonen existieren „angeregte“ Zustände.
- Zunächst koppeln die beiden Spins der Quarks parallel (S = 1) oder antiparallel (S = 0) zum Gesamtspin S.
- S koppelt mit Bahndrehimpuls L = 0, 1, 2,... zum Gesamtdrehimpuls J.
- Parität $P = -(-1)^L$
- Beispiel: Nonett zu $J^P = 1^-$ enthält ρ, K *, ω, ϕ mit Massen von der Ordnung 800 MeV; Besonderheit: Mischung der zu Oktett und Singulett gehörenden Zentrumszustände, so dass

$$\phi \approx |s\bar{s}\rangle \qquad \omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle\right)$$

- Das erklärt die beobachteten Zerfallskanäle:

$$\phi \to \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} K^+K^- \\ K^0\bar{K}^0 \end{array}\right\} \; 84\% \\ \left.\pi^+\pi^-\pi^0\right\} \; 15\% \end{array}\right. \qquad \omega \to \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \pi^+\pi^- \\ \pi^0\gamma \end{array}\right\} \; 10\% \\ \left.\pi^+\pi^-\pi^0\right\} \; 90\% \end{array}\right.$$

- Teilchen werden schwerer mit zunehmendem J.

Bestätigung des Modells: Bisher wurden keine Mesonen gefunden, die dieses Modell nicht erklären kann, zum Beispiel solche mit Quantenzahlen I = 3/2 oder Y = 2.

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Baryonen

- Wir untersuchen Zustände, die aus drei Quarks bestehen. Analoges Vorgehen wie eben liefert: $[3]\otimes[3]=[6]\oplus[\overline{3}]$ und $[6]\otimes[3]=[10]\oplus[8]$
- Damit erhalten wir:
$$[3]\otimes[3]\otimes[3]=([6]\oplus[\overline{3}])\otimes[3]=[6]\otimes[3]\oplus[\overline{3}]\otimes[3]=[10]\oplus[8]\oplus[8]\oplus[1]$$
- Wir können die leichtesten Baryonen *p*, *n*, Σ, Ξ und Λ mit Spin-Parität $J^P = ½^+$ und Massen der Ordnung *m* = O(1000 MeV) zu einem Oktett zusammen fassen:

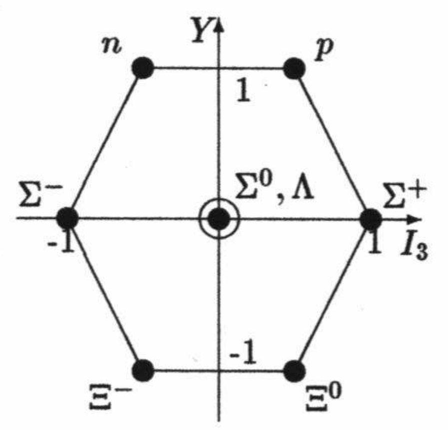


Abbildung 7: Das Oktett der leichtesten Baryonen

- Nukleonen: Isospin-Dublett mit *Y* = 1
- Σ-Teilchen: Triplett mit *Y* = 0
- Ξ-Teilchen: Dublett mit *Y* = –1
- Λ: Isospin-Singulett

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Baryonen-Dekuplett

Test des Modells (Anfang der 60er Jahre): Dekuplett [10] der Baryonen

- Neun der zehn Zustände konnten bekannte Teilchen mit $J^P = 3/2^+$ zugeordnet werden:

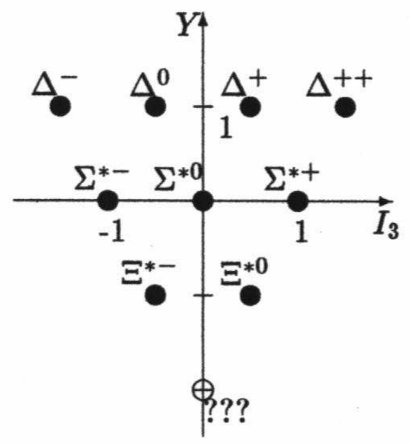


Abbildung 8: Das Dekuplett der Baryonen

- Isospin-Quartett der Δ-Teilchen mit $Y = 1$ und $m_\Delta = 1232$ MeV
- Triplett der Σ^*-Teilchen mit $Y = 0$ und $m = 1384$ MeV
- Dublett der Ξ^*-Teilchen mit $Y = -1$ und $m = 1533$ MeV

- Spitze blieb zunächst frei: Deshalb Postulat eines neuen Teilchens Ω^- mit $J^P = 3/2^+$, $B = 1$, $I = 0$, $Y = -2$, also $S = -3$.
- Aus Massendifferenz zwischen den Isospinmultipletts ($\Delta m \approx 150$ MeV) folgerte man $m_\Omega \approx 1680$ MeV.

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Brechung der Symmetrie

Wäre die *SU(3)*-Symmetrie exakt erfüllt, hätten alle Teilchen eines Multipletts die gleiche Masse.

- Brechung der Symmetrie durch zwei Effekte:
  - Teilchen innerhalb eines Isospin-Multipletts unterscheiden sich in der Masse um einige MeV;
    Grund: unterschiedliche elektrische Ladungen, daher Anteil der Bindungsenergie aus elektromagnetischer WW verschieden
  - Zwischen den Isospin-Multipletts um zwei Ordnungen größere Massenaufspaltung; etwa 150 MeV beim Dekuplett, etwa 200 MeV beim Oktett, bei den Mesonen noch mehr
    Grund: starke WW; die einzelnen Multipletts unterscheiden sich durch die Strangeness der Teilchen
- Naheliegend: $m_u \approx m_d =: m$ aber $m_s > m$

Die *SU*(3)-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Massenbeziehung

- Beispielhaft: Herleitung einer Massenbeziehung für das Baryonenoktett
- Annahme: Bindungsenergie W_B zwischen den Quarks bei all diesen Teilchen gleich.
  Bei der Zerlegung des Produktes der Darstellungen erhält man die Zusammensetzung der Zustände gleich mit, z.B. |p>=|uud> oder |Ξ^0>=|uss>. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m_N &= 3m - W_B \\ m_\Sigma &= 2m + m_s - W_B \\ m_\Lambda &= 2m + m_s - W_B \\ m_\Xi &= m + 2m_s - W_B \end{aligned}$$

- Daraus folgt die Massenbeziehung

$$\frac{m_N + m_\Xi}{2} = \frac{3m_\Lambda + m_\Sigma}{4}$$

die experimentell erstaunlich gut erfüllt ist:

$$1128 = \frac{939 + 1318}{2} \approx \frac{3 \cdot 1116 + 1193}{4} = 1135 \quad [\mathrm{MeV}]$$

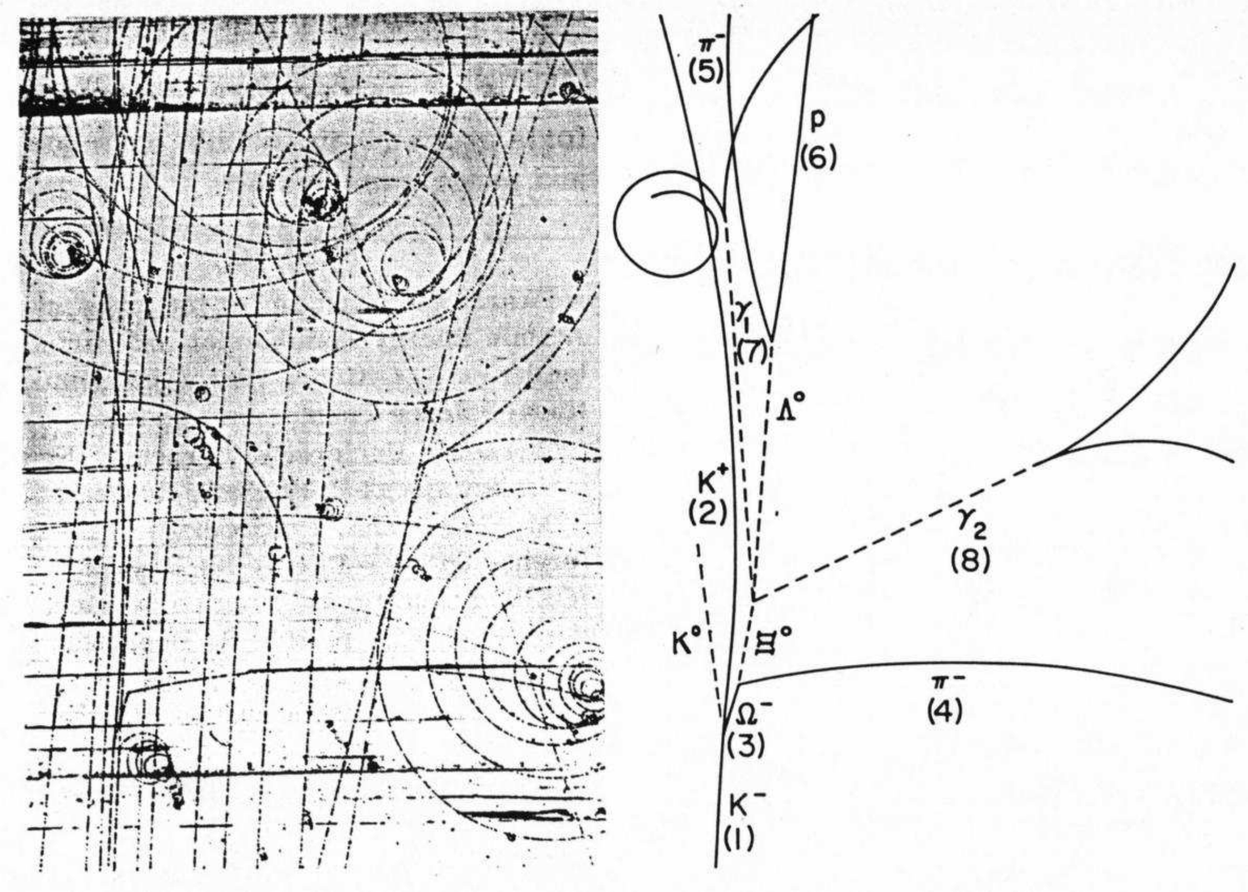
Die $SU(3)$-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen
Die Farben der Quarks

- Mindestens zwei **Probleme** im bis jetzt entwickelten Modell:
  - In der Natur nur Zustände der Form $|q\bar{q}\rangle, |qqq\rangle$ oder $|\overline{q}\overline{q}\overline{q}\rangle$ aber nicht zum Beispiel |*qq*>
  - Scheinbar Verletzung des Pauli-Prinzips durch das Δ^{++}: Spin 3/2 nur erklärbar durch Wellenfunktion $|\Delta^{++}\rangle = |uuu\rangle|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ die symmetrisch unter Vertauschung zweier Quarks ist.
- Lösung: Weiterer innerer Freiheitsgrad der Quarks, die **Farbe** mit den Werten *rot r*, *grün g* oder *blau b*.
- Beschreibung des Farbmodells auch durch die $SU(3)$-Symmetrie.
- Insbesondere: Singulett-Zustand ist antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Quarks: $|1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|rgb\rangle - |rbg\rangle + |brg\rangle - |bgr\rangle + |gbr\rangle - |grb\rangle\right)$
- Forderung: Hadronen sind farblos → Es können nur solche Produkte von Quarks gebildet werden, in deren Zerlegung in Summanden ein Singulett vorkommt: Nur $[3]\otimes[\bar{3}]$, $[3]\otimes[3]\otimes[3]$ und $[\bar{3}]\otimes[\bar{3}]\otimes[\bar{3}]$.

Die Entdeckung des Ω^--Teilchens

- Vorhersage des Ω^- war Prüfstein für das Modell; Entdeckung 1964 am Brookhaven National Laboratory:
- Eine 80-Zoll-Wasserstoff-Blasenkammer wurde einem Strahl von 5 GeV-K^--Mesonen ausgesetzt, eines von etwa 100000 Fotos enthält das gesuchte Ereignis.

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$$



$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$$
$$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$$
$$\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$$
$$\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$$
$$\rightarrow 2\times\left(e^+ + e^-\right)$$

- Massenbestimmung jeweils aus Krümmungs- und Blasendichtenmessung
- Ergebnis für das Ω^-: $m_\Omega = 1686 \pm 12$ MeV
- Aus der Länge der Spur: Lebensdauer des Ω^- beträgt $7\cdot 10^{-11}$ s

Weitere Indizien

- Aus kinematischen Überlegungen:Transversalimpuls der Spur (4) größer als der des negativen Zerfallsprodukts bei jedem anderen bekannten Zerfall eines negativen Teilchens, außer $\Xi^- \rightarrow e^- + n + \nu$ Aber:
  - Verletzt Auswahlregel $\Delta S = \pm 1$
  - Erklärt nicht die beiden Paarerzeugungen
- Lebensdauer deutet auf schwachen Zerfall; hätte das Teilchen $S = -1$, so zerfiele es stark in etwa 10^{-22} s in bekannte Teilchen

$\rightarrow$ Identifizierung des Teilchens von Spur (3) als Ω^-

Die Entdeckung des *c*-Quarks

- **Novemberrevolution:** Unabhängige Entdeckung eines neuen Teilchens $J/\Psi(1S)$ durch zwei Gruppen, das nicht in das bisherige Ordnungsschema passte.
- Erzeugung zum Beispiel in Elektron-Positron-Collidern, und zwar bei einer Schwerpunktsenergie von 3097 MeV, der Ruhemasse des $J/\Psi(1S)$.

Resonanz: Scharfes Maximum im Wirkungsquerschnitt (z.B. bei e^+e^--Stößen) bei einer bestimmten Schwerpunktsenergie.
Höhe: Maß für die Produktionsrate des neuen Teilchens
Breite: umgekehrt proportional zur Lebensdauer (Unschärferelation)

- Breite der Resonanz beim $J/\Psi(1S)$ beträgt nur (77 ± 5)keV, nicht vergleichbar mit ähnlichen Mesonen oberhalb der Masse des ϕ
- $\rightarrow$ Vorliegen eines neuartigen Zustandes **Charmonium**

$$|J/\Psi\rangle = |c\bar{c}\rangle$$

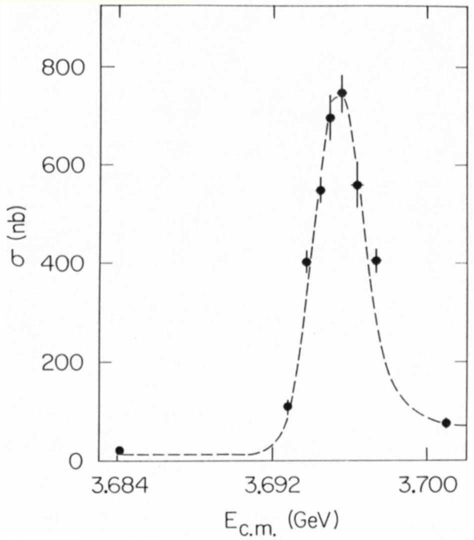
Das *c*-Quark

- Charmonium besteht aus einem neuen Quark, dem ***c*-Quark,** und seinem Anti-Teilchen.
- Einführung der neuen Quantenzahl **charm** C, das c-Quark erhält $C = 1$
- Übergang zur Symmetriegruppe $SU(4)$
- Deren Multipletts enthalten je eine I_3, Y und C-Achse, ein fundamentales Multiplett ist ein Tetraeder mit *uds* wie gehabt in der I_3-Y-Ebene und c bei $C = 1$, $I_3, Y = 0$
- Zur Ausreduktion von Produktzuständen zieht man besser raffiniertere Methoden der Gruppentheorie heran.

Die *SU(4)*-Symmetrie ist wegen der sehr großen Masse des *c*-Quarks recht stark gebrochen.

Angeregte Zustände von Charmonium

- Neben dem Zustand $J/\Psi(1S)$ existieren noch andere Anregungszustände mit verschiedenen Massen.
- Man kann für Charmonium ein Termschema analog zu den aus der Atomphysik bekannten angeben.
- Wenige Tage nach Entdeckung des $J/\Psi(1S)$ wurde am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) eine weitere Resonanz gefunden, Schwerpunktsenergie $E_{\text{cm}} = (3{,}695 \pm 0{,}004)\,\text{GeV}$.



- Es gibt natürlich ebenfalls Mesonen und Baryonen mit charm, zum Beispiel

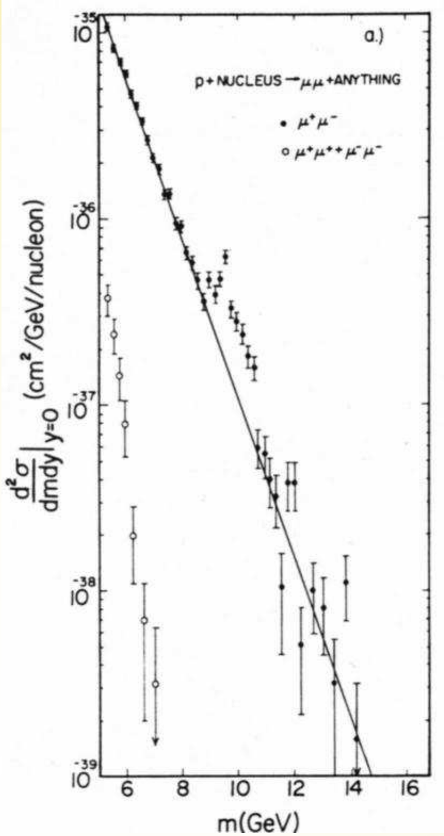
$$D^0 = \left| c\bar{u} \right\rangle$$

$$D^+ = \left| c\bar{d} \right\rangle$$

$$D_s^+ = \left| c\bar{s} \right\rangle$$

Das *b*-Quark

- 1977 am Fermilab in Chicago: Beschuss eines Kupfer-Blei-Targets mit Protonen.
- Dabei Entdeckung einer neuen Resonanz Υ



- Auf der Abbildung sind zwei oder mehr nicht aufgelöste Resonanzen zu sehen (Massen der heute bekannten Υ-Resonanzen: 9,46 GeV, 10,02 GeV und 10,35 GeV)
- Deutung als gebundene Zustände eines neuen Quarks, dem **bottom-Quark** *b*:

$$\left|\Upsilon\right\rangle = \left|b\bar{b}\right\rangle$$

Konsequenzen

- Einführung einer weiteren additiven Quantenzahl **bottomness** oder **beauty** B^*, die wie der charm von starker und elektromagnetischer Wechselwirkung erhalten wird.
- b-Quark erhält $B^* = -1$
- Man hat ebenfalls Mesonen und Baryonen, die das b-Quark enthalten, gefunden
- Verallgemeinerung der Gell-Mann-Nishijima-Relation zu

$$Q = e\left(I_3 + \frac{B + S + C + B^*}{2} \right)$$

Schlusswort

- Es ist eine erstaunliche Tatsache, dass die Ordnung im Zoo der Elementarteilchen durch eine abstrakte mathematische Symmetriegruppe erreicht wird.
- Wie gesehen, ist die beschriebene Symmetrie recht stark gebrochen, besonders bei Einbeziehung der schwereren Quarks. Das Quarkmodell steht also eher auf einem wackligen Fundament.
- Allerdings stellt sich heraus, dass der $SU(3)$-Symmetrie fundamentale Bedeutung zukommt bei der Beschreibung der Farbladungen der starken Wechselwirkung.