

Wellenfunktion der stehenden Welle

$$\rightarrow \gamma_n = \underbrace{A_n(x)}_{A_n \sin(k_n x)} \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (5.7)$$

5.3 Fourier Analyse

5.3.1 Superposition stehender Wellen

Schwingendes System - Saite, z.B. —

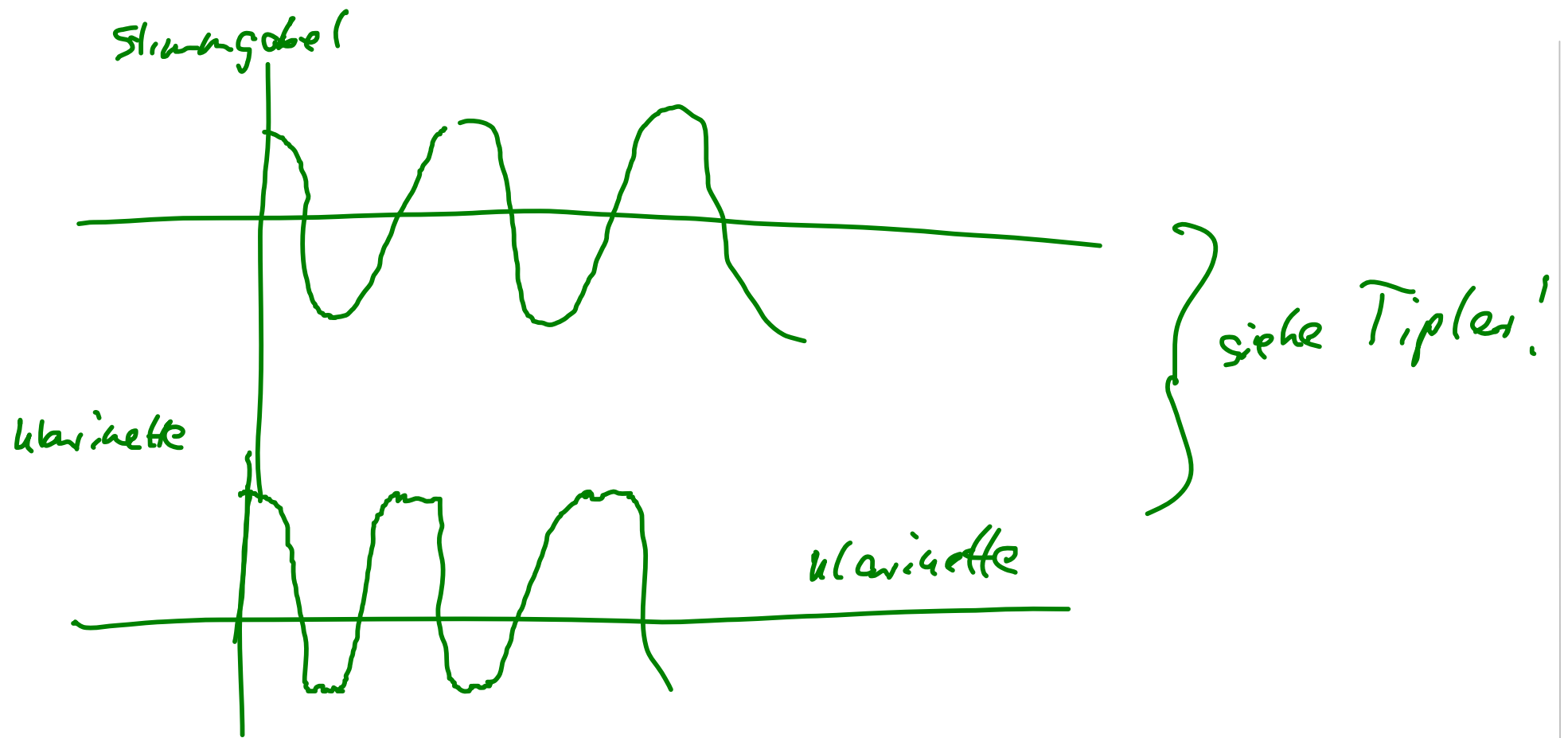
→ keine Schwingung in einer bestimmten Oberschwingung,
sondern Linearkombination der harm.
Schwingungen.

$$y(x, t) = \sum_n A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + d_n) \quad (5.8)$$

mit $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, $\omega_n = 2\pi f_n$

→ gibt "charakterist." Klang von Instrumenten

⇒ unterschiedl. Tonqualität, d.h. unterschiedliche Reihen / Gewichtungen von Obertönen:

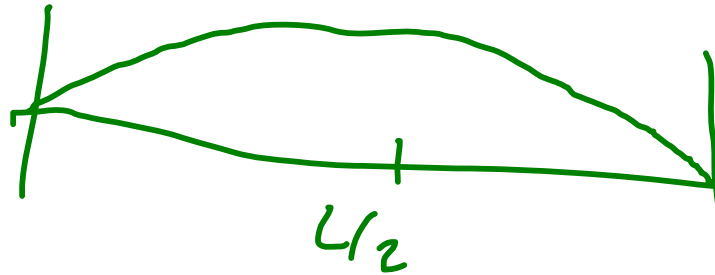


5.3.2 Harmonische Analyse und Synthese

Versch. Wellenformen/Funktion können mit harm. Analyse (Fourier Analyse) in ihre beitragenden Oberschwingungen zerlegt und analysiert werden.

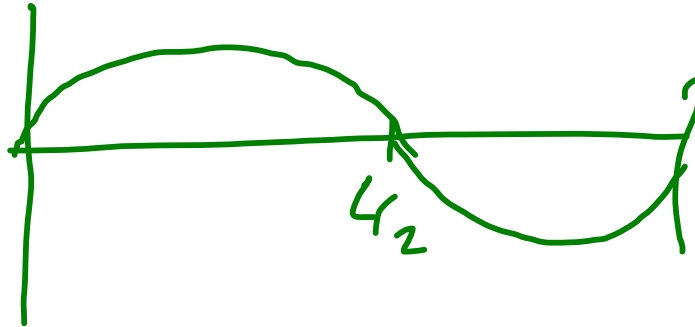
schwingende Saite:

$n=1$



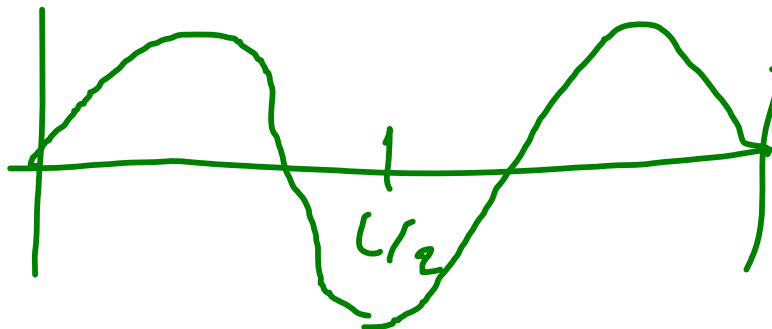
"symm." um $L/2$

$n=2$



"antisymm." um $L/2$

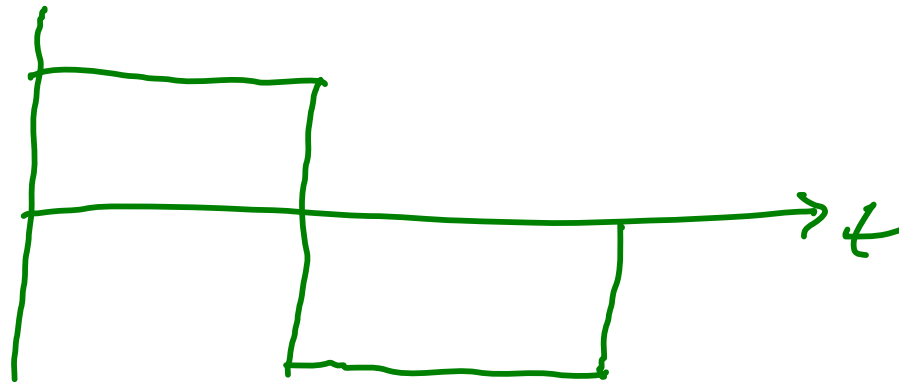
$n=3$



"symm." um $L/2$

⇒ Abwechselndes Symmetrieverhalten in den
 Oberschwingungen: $\text{sym} - \text{anti} - \text{sym} \dots$

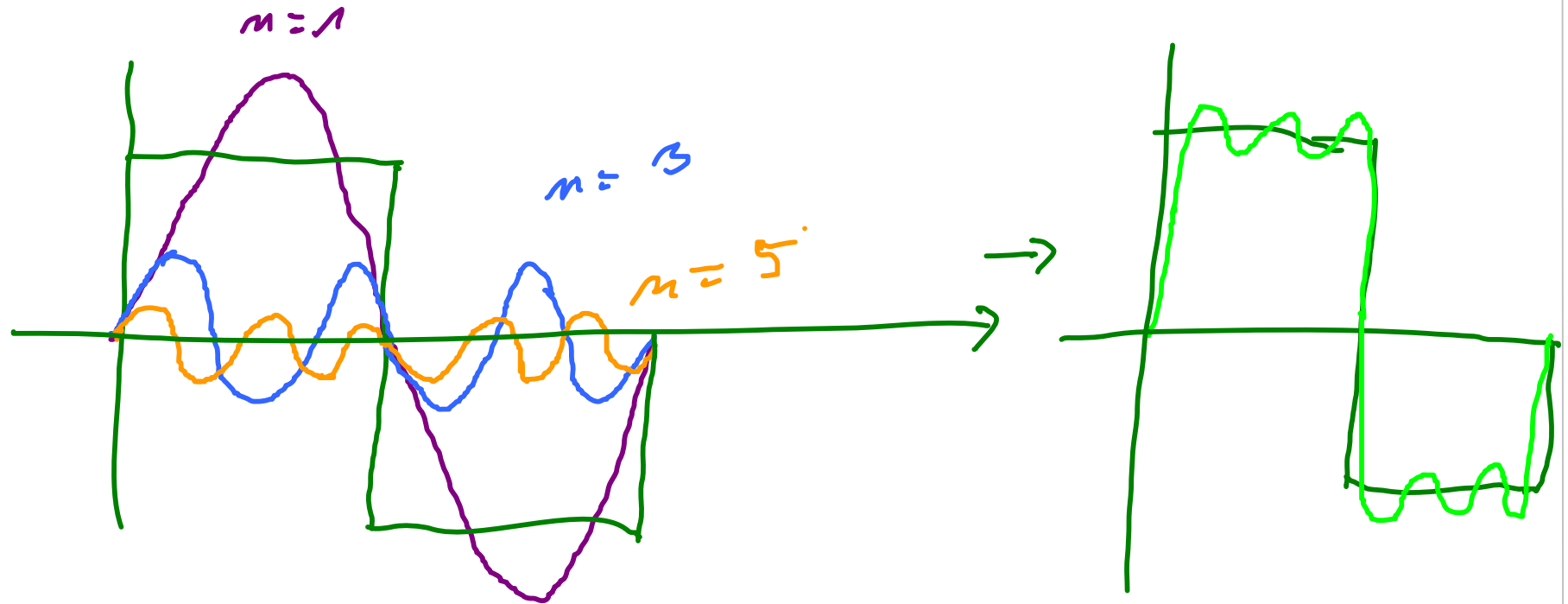
⇒ Jedes period. System kann man aus
 den harm. Oberwellen zusammensetzen



1. Schritt:

Da "antisymm." → wähle sinus als Grund-
 schwingung

2. Schritt : Addieren Oberschwingung mit
selben Symmetriecharakter



$\Rightarrow$ Je mehr Oberschwingungen ; um so besser wird
das Signal approximiert

3. Schritt: Optimize das Ergebnis durch
Variation der Amplituden

$\hat{=}$ Gewichtung der einzelnen Oberschwingungen

5.3.3 Math. Konzept

Blk 10

(siehe Vorlesung vom 8.12.14!)

L-period. Fkt $f(x) \hat{=}$ (unendliche) Reihe von
sin und cos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{L} n x\right) \right) \quad (5.3)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{L} n x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{L} n x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i \frac{2\pi}{L} n x}$$

"Fourierreihe"

Alle Terme der Fourier Reihe sind zueinander orthogonal ;

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} r x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L} p x\right) dx = 0$$

für alle $\forall r, p$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \cos\left(\frac{2\pi}{L} r x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L} p x\right) dx = \begin{cases} L & r=p=0 \\ L/2 & r=p>0 \\ 0 & r \neq p \end{cases}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} r x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} p x\right) dx = \begin{cases} 0 & r=p=0 \\ L/2 & r=p>0 \\ 0 & r \neq p \end{cases}$$

x_0 ist beliebig, häufige Wahl: $x_0 = 0$ oder $-L/2$

Die Entwicklungskoeffizienten lauten:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} dx f(x) e^{-i \frac{2\pi}{L} n x}$$

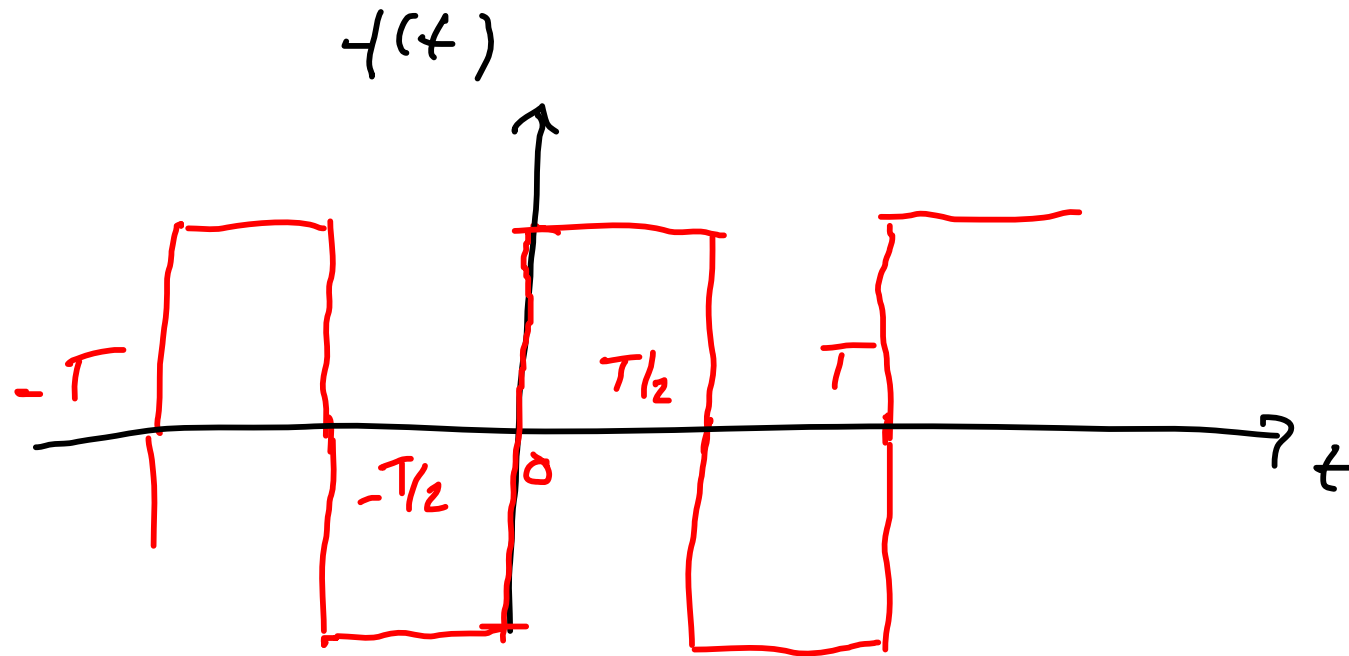
$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L} n x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L} n x\right)$$

$\Rightarrow$ weitere Eigenschaften der Koeffizienten, siehe
8.12.14

Beispiel: Rechteckimpuls

10



d.h.
$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ +1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. Schritt: Symmetrieverhalten

$$f(-t) = -f(t)$$

→ punktsymmetrisch

→ alle cos-Terme verschwinden

2. Schritt: Koeffizienten bestimmen:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n t\right)$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 dt \, (-1) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) + \int_0^{T/2} dt \, (+1) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) \right]$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} dt \, \sin\left(\frac{2\pi}{T} n t\right)$$

$$= \frac{4}{T} \left[-\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) \right]_0^{T/2}$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left(\cos(n\pi) - 1 \right) = -\frac{2}{\pi n} \left[(-1)^n - 1 \right]$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left[1 - (-1)^n \right] = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n} & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

3. Schritt: einsetzen in (5.8)

$$f(t) = \sum_{\substack{n=2k+1 \\ k=0}}^{\infty} \frac{4}{\pi (2k+1)} \sin\left(\frac{2\pi}{T} (2k+1)t\right) \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right]$$

(5.12)