# 1.9.1 Arbeit und Wegintegrale

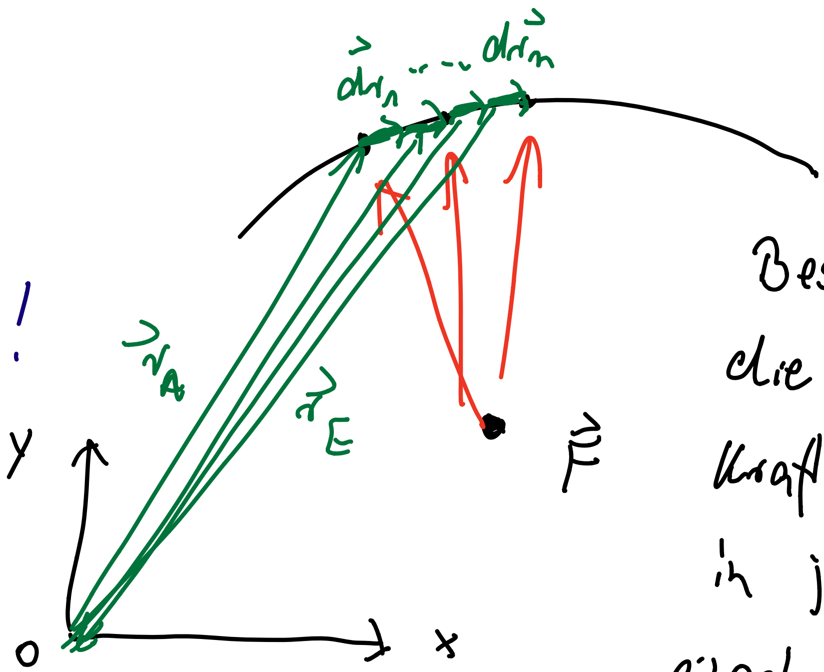
(Otto, Kap. 12)

$$\text{Arbeit} = \text{„Kraft} \cdot \text{Weg"}$$

↑ Zahl ↑ Vektor · ↑ Vektor

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

„Wegintegral"!




Bestimme die wirkende Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ in jedem einzelnen $d\vec{r}$!

Wie kann die resultierende Bewegung beschrieben werden?

⇒ Bewegungsgleichung ermitteln!

Bewegungsgleichung = Gleichung, die die Bewegung komplett beschreibt und vorhersagt!

Sie ist gegeben durch: $\vec{F}_{ges} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$

Berechnen der Arbeit!

falls m konst.

$$W = \int_{r_a}^{r_e} \vec{F}_{ges}\, d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_e} m\ddot{\vec{r}}\, d\vec{r} =$$

$$= m\int_{r_a}^{r_e} \ddot{\vec{r}}\, d\vec{r} = m\int_{r_a}^{r_e} \ddot{\vec{r}}\, \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt =$$

$$= m\int_{t_a}^{t_e} \ddot{r}\,\dot{r}\, dt = m\int d\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right)$$

NR: $f = \frac{1}{2}\dot{r}^2 \qquad \frac{df}{dt} = \frac{1}{2}\, 2\,\dot{r}\,\ddot{r} = \dot{r}\,\ddot{r}$

$$= m/2 \int_{v(t_a)}^{v(t_e)} d(v^2) = \frac{m}{2}\left[v^2(t_e) - v^2(t_a)\right]$$

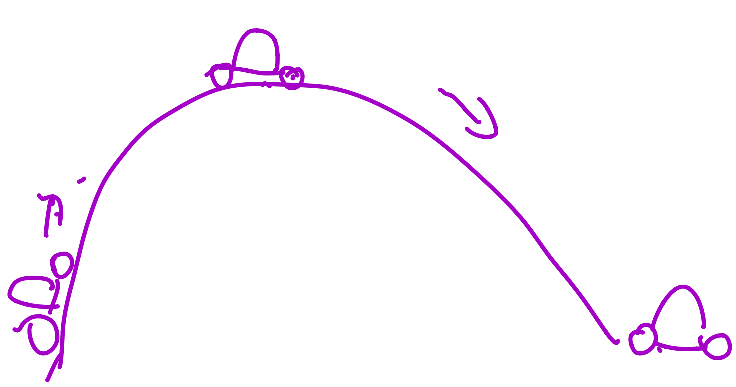
$$= E_{kin}(t_e) - E_{kin}(t_a)$$

$\Rightarrow$ Gesamtarbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energien $\frac{1}{2} m v^2$, die der Körper jeweils am Ort $\vec{r}_e$ und $\vec{r}_a$ besitzt.

Potentielle Energie:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{ges}\, \Delta\vec{r}}_{\text{Gesamtarbeit}} = E_{kin}(t_e) - E_{kin}(t_a)$$

$$\text{"} \int \vec{F}_{ges}\, d\vec{r} \overset{?}{=} E_{pot} \text{"} ?$$



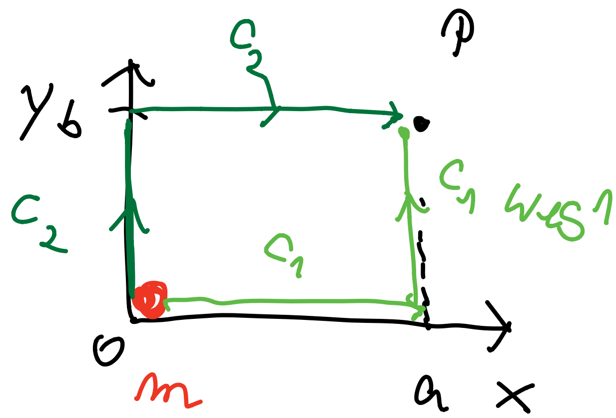
⇒ Welche Eigenschaft muss das Kraftfeld haben, damit die Gesamtenergie erhalten ist?

Bsp. 1 : Kraftfeld $\vec{F} = (3x, c, 0)$

≙ Kraftfeld linear in x-Richtung, konstant in y-Richtung (d.h. = 0 setzen) und hat keine Komponente in z-Richtung.

$$W_{wes\,1} = \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$= \int_{(0,0)}^{(a,0)} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{(a,0)}^{(a,b)} \vec{F}\, d\vec{r}$$




$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \qquad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = dx + dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(a,0)} (F_x\, dx + F_y\, dy) + \int_{(a,0)}^{(a,b)} (F_x\, dx + F_y\, dy)$$

x-komp. y-komp.

$$= \int_0^a F_x\,dx + \cancel{\int_0^0 F_y\,dy} + \cancel{\int_a^a F_x\,dx} + \int_0^b F_y\,dy$$

$$= \int_0^a F_x\,dx + \int_0^b F_y\,dy = \int_0^a 3x\,dx + \int_0^b c\,dy$$

$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + c\left[y\right]_0^b = 3\frac{a^2}{2} + cb$$

Weg 2:

$$W_{weg2} = \int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(0,b)} \vec{F}\,d\vec{r} + \int_{(0,b)}^{(a,b)} \vec{F}\,d\vec{r}$$

$$\overset{F_x dx + F_y dy}{=} \cancel{\int_0^0 F_x\,dx} + \int_0^b F_y\,dy + \int_0^a F_x\,dx + \cancel{\int_b^b F_y\,dy}$$

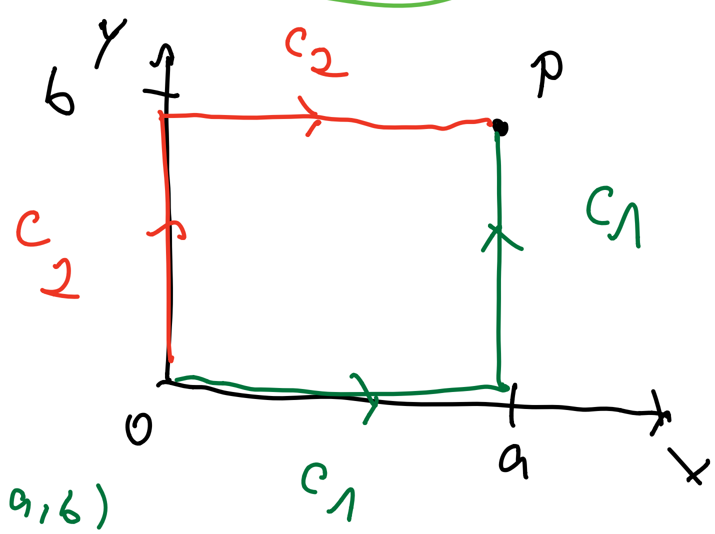
$$= \int_0^b c\,dy + \int_0^a 3x\,dx =$$

$$= c\left[y\right]_0^b + 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = cb + 3\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{weg1} = W_{weg2}}$$

⇒ Geleistete Arbeit ist unabhängig vom gewählten Weg!

Bsp. B: Kraftfeld $\vec{F} = (3xy\,,\, \underset{\text{const.}}{c}\,,\, 0)$




$$W_{Weg\,1} = \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$= \int_{C_1} (F_x\, dx + F_y\, dy)$$

$$= \int_{(0,0)}^{(a,0)} (F_x\, dx + F_y\, dy) + \int_{(a,0)}^{(a,b)} (F_x\, dx + F_y\, dy)$$

$$= \int_{(0,0)}^{(a,0)} (3xy\, dx + c\, dy) + \int_{(a,0)}^{(a,b)} (3xy\, dx + c\, dy)$$

$y=0$

$$= \int_0^a 3xy\, dx + \cancel{\int_0^0 c\, dy} + \cancel{\int_a^a 3xy\, dx} + \int_0^b c\, dy$$

$$= 0 + c\,[y]_0^b = cb$$

Weg 2:

$$W_{Weg2} = \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \ldots = cb + \frac{3ba^2}{2}$$

$y = b$

$$= \cancel{\int_0^0 3xy\,dx} + \int_0^b c\,dy + \int_0^a 3xy\,dx + \cancel{\int_b^b c\,dy}$$

$$= \int_0^b c\,dy + \int_0^a 3xb\,dx = b\left(c + \frac{3}{2}a^2\right)$$

$$\text{"} = \ldots = \text{"} \int_{C_2} \left(F_x\,dx + F_y\,dy\right)$$

$$= \int_{(0,0)}^{(0,b)} \left(3xy\,dx + c\,dy\right) + \int_{(0,b)}^{(a,b)} \left(3xy\,dx + c\,dy\right)$$

$$\Rightarrow W_{Weg\,2} \neq W_{Weg\,1}$$

In diesen Fall: Arbeit hängt vom gewählten Weg ab!

$$\boxed{\text{Für } \underline{\text{konservative}} \text{ Kräfte gilt: die geleistete Arbeit ist vom gewählten Weg unabhängig!}}$$