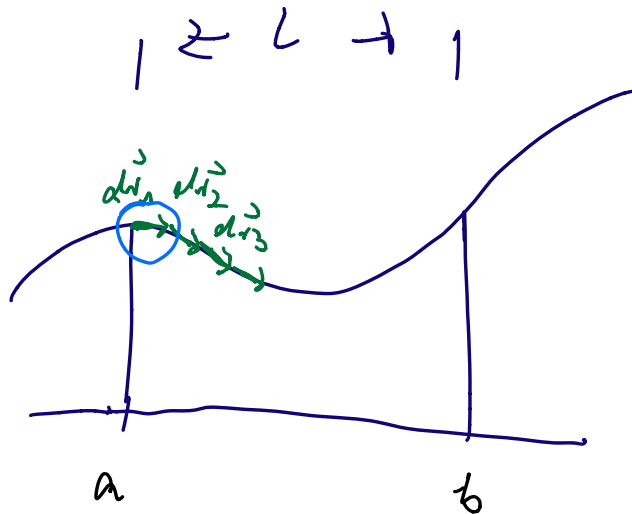


1.8 Bogenlänge, Fortsetzung

Weg 2: Parametrisierung des Bogenelementes



$$\int |\vec{dr}_i| = \int \sqrt{ds^2} \quad \text{direkt}$$

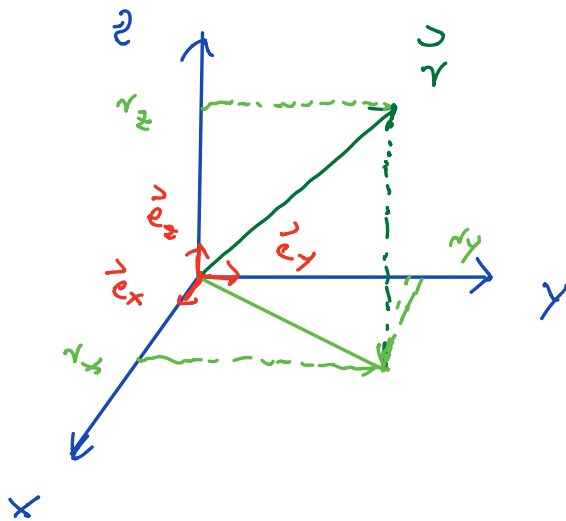
"Wegintegral"

Linienelement: $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$

Wie sieht das Linienelement in den verschiedenen Koordinatensystemen aus?

Coördinaten systemen :

a) Kartesische Coördinaten x, y, z



$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) \text{ m.v.}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

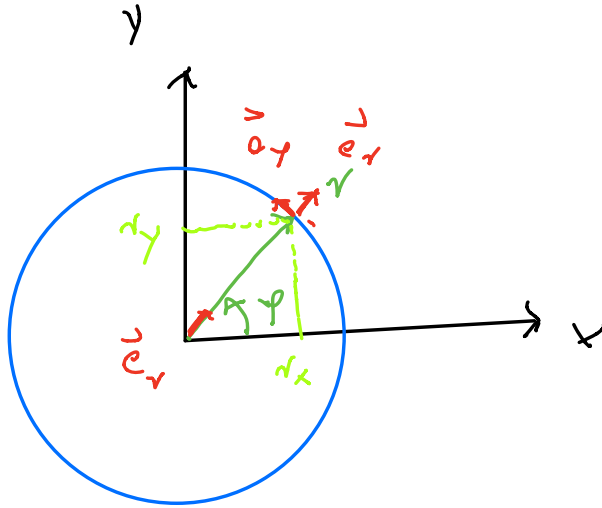
Basis vectoren :

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0), \vec{e}_y = (0, 1, 0), \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

orthonormales System, d.h.

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

b) Polar koordinaten (2-Dim.) r, φ



$$\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad \text{mit} \quad |\vec{r}| = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = r$$

$$\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \text{und} \\ \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

in der kartesischen Basis (x, y) .

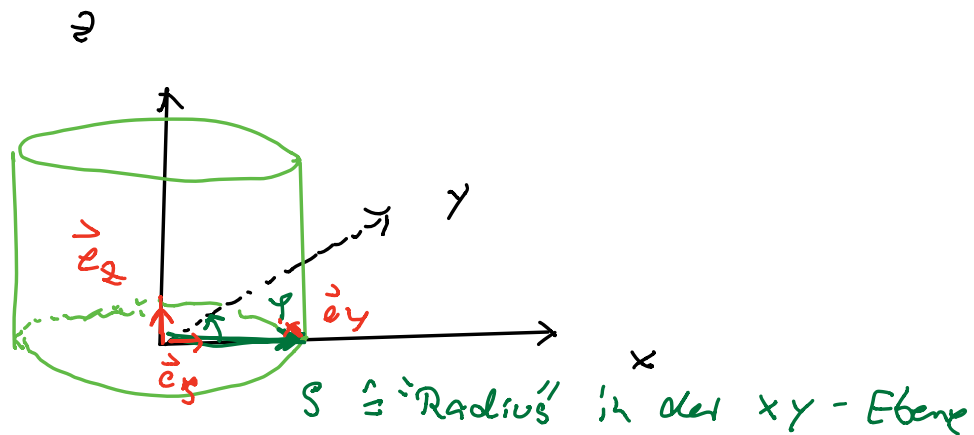
Nebenbemerkung:

Die Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ in der

(r, φ) -Basis lauten: $\vec{e}_r = (1, 0), \vec{e}_\varphi = (0, 1)$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ sind ebenfalls orthonormal.

c) Zylinderkoordinaten (3D) ρ, φ, z



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad |\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Umkehrung von Kartesischen in Zylinderkoordinaten

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad z = z$$

Einheitsvektoren (in x, y, z -Basis):

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

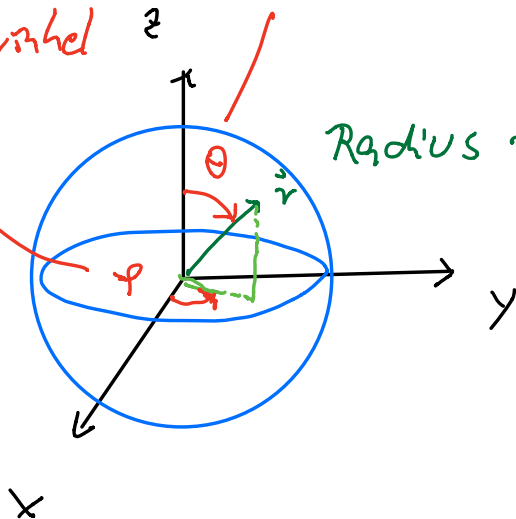
Nebenbemerkung: $\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ in (φ, θ, z) -Basis

$$\vec{e}_\varphi = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_\theta = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

d) Kugelkoordinaten (3D) r, θ, φ

Azimutwinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$

Polarwinkel, $\theta \in [0, \pi]$



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Umrechnung von kartesischen in Kugelkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Basisvektoren (in x, y, z -Basis):

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nebenbemerkung:

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ in (r, θ, φ) -Basis?

$$\vec{e}_r = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_\theta = (0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_\varphi = (0, 0, 1)$$

Zurück zu den Linierelementen:

- Kartesisches KO: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- Polarkoordinaten: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$
- Zylinderkoordinaten: $ds^2 = dg^2 + g^2 d\varphi^2 + dz^2$
- Kugelkoordinaten: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$

Beispiel: Nach Kreisumfang in Polarkoordinaten
allgemein, aber nun mittels Weg:
Polarkoordinaten

$$L = \int_C |d\vec{r}| = \int_C \sqrt{ds^2} \stackrel{\downarrow}{=} \int_C \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

Die Kreisgleichung lautet:

$$\vec{r}(t) = (r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t))$$

$$\begin{aligned} &= \int_C \sqrt{d\vec{r}(t)^2 + r^2(t) d\varphi^2(t)} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{dt^2 \frac{dr^2(t)}{dt^2} + r^2(t) dt^2 \frac{d\varphi^2(t)}{dt^2}} \end{aligned}$$

da $\varphi(0)=0$
 $\varphi(2\pi)=2\pi$



$$= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 + r^2(t) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} \quad \checkmark \quad \text{wie vorher}$$

Otto, Kap. 12

1.9 Nichtkonservative Kräfte und Arbeit

1.9.1 Arbeit und Wegintegrale

Was ist Arbeit?

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$$

Wichtig:

↑
Zahl

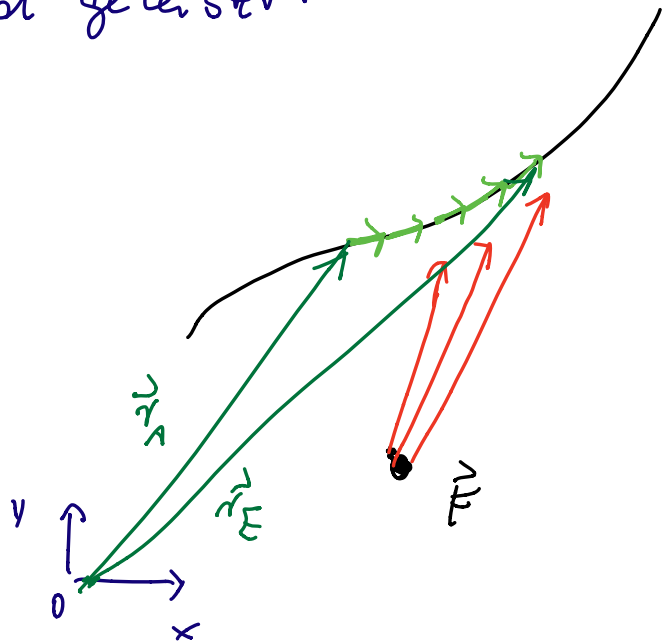
↑
Vektor

•
↑
Vektor

Welche Arbeit wird geleistet?

$$W = \int_{r_A}^{r_E} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

"Wegintegral"!



Bestimme die wirkende Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ in jedem einzelnen $d\vec{r}$!

partielle Ableitung:

$$f(x, y)$$

$$f_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=\text{const}}$$

$$f_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=\text{const}}$$

$$f(x, y) = 2x^2y + y^2 + x^3$$

$$\frac{df}{dx} ?$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=\text{const}} = 4xy + 3x^2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=\text{const}} = 2x^2 + 2y$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=\text{const}} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=\text{const}} dy$$