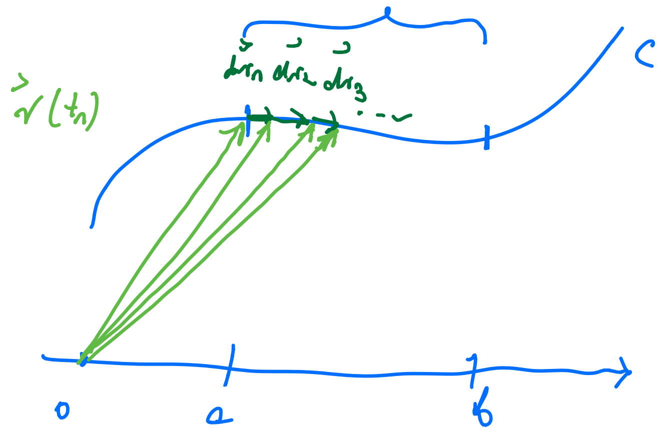
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

1.8 Bogenlänge

dHo, 6.3

Frage: Welche Strecke legt ein Körper längs der Kurve $\vec{r}(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t zurück?



"Bogenlänge"

$$L = \int_C |d\vec{r}_1| + |d\vec{r}_2| + \dots + |d\vec{r}_n| = \int_a^b |d\vec{r}_i|$$

nicht praktikabel!

Weg 1: Kurve muss parametrisiert werden:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit den Grenzen $\vec{r}(t_0) = \vec{a}$ und

$\vec{r}(t_E) = \vec{b}$

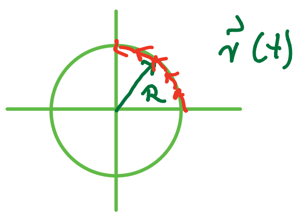
$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\, dt$$

$\Rightarrow$ Bogenlänge einer differenzierbaren Kurve $\vec{r}(t)$:

$$L = \int_a^b |d\vec{r}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |\dot{\vec{r}}|$$

Beispiel: Kreisumfang mit Radius R

Winkelgeschwindigkeit ω



Parametrisierung $\vec{r}(t)$ für den Kreis:

$\Rightarrow$ siehe Kreisgleichung

$$\vec{r}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$$

Ableitung:
$$\dot{\vec{r}}(t) = R\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = R\omega \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\Rightarrow L = \int_a^b |d\vec{r}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |\dot{\vec{r}}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, R\omega$$

$$= \int_0^{t_E = T = \frac{2\pi}{\omega}} dt\, R\omega = R\omega\left[\frac{2\pi}{\omega} - 0\right] = 2\pi R \quad \checkmark$$

Die Länge muss natürlich unabhängig von der gewählten Parametrisierung sein!

b) Kreisumfang in Polarkoordinaten allgemein

$$\vec{r}(t) = \left(r(t) \cos\varphi(t) \,/\, r(t) \sin\varphi(t) \right)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\dot{r}(t)\cos\varphi(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) \,,\, \dot{r}(t)\sin\varphi(t) + r(t)\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) \right)$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\dot{r}^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2\dot{r}r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \dot{r}^2\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi}$$

$$= \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$$

$$\Rightarrow \quad L = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |\dot{\vec{r}}| = \int_{t_0}^{t_E} dt \sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2(t)\,\dot{\varphi}^2(t)}$$

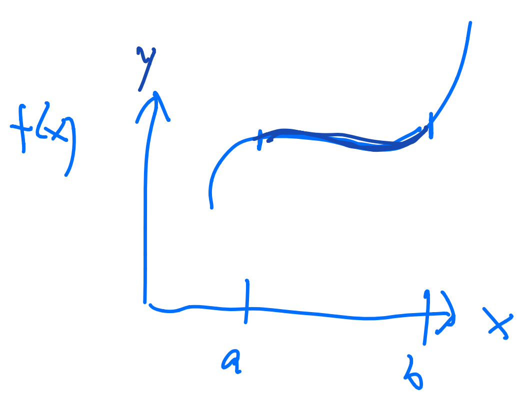
Test: $r(t) = R = \text{const}$

$$= \int_{t_0}^{t_E} dt\, R\,\dot{\varphi}(t) = R \int_{t_0}^{t_E} \cancel{dt} \frac{d\varphi(t)}{\cancel{dt}} = R\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi R \quad \checkmark$$

unabhängig von $\varphi(t)$!

Allgemein:



Bogenlänge einer $y = f(x)$ bestimmen.

Was "läuft" bei $y = f(x)$? $\rightarrow$ x "läuft", ist der Laufparameter

$\Rightarrow$ d.h. die Aufgabe ist es, eine geeignete Parametrisierung zu finden

$\rightarrow$ bei uns: $x := t$ und $y := f(t)$

Die Bahnkurve hat die Komponenten:

$$\vec{r}(t) = (\underbrace{t}_{x\text{-Komp.}}, \underbrace{f(t)}_{y\text{-Komp.}}) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \left(1, \frac{df(t)}{dt}\right)$$

$$= (1, \dot{f}(t))$$

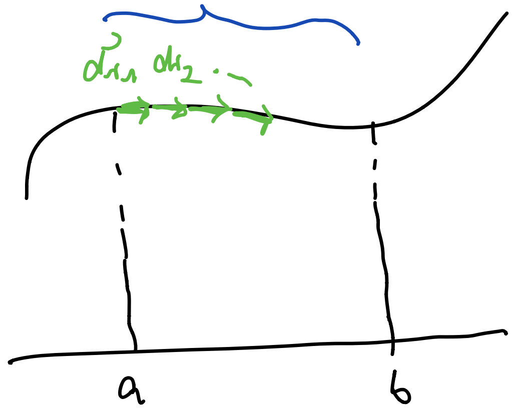
$$L = \int |d\vec{r}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |\dot{\vec{r}}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |(1, \dot{f}(t))|$$

$$= \int_{t_0}^{t_E} dt\, \sqrt{1 + (\dot{f}(t))^2}$$

Weg 2: Parametrisierung des Bogenelementes

$$\underbrace{\int |d\vec{r}_i|}_{L} = \int \sqrt{ds^2} \quad \text{direkt}$$

$\Rightarrow$ "Wegintegral" oder "Linienintegral"



Linienelement: $ds^2 := d\vec{r} \cdot d\vec{r}$

Nebenbemerkung:
- Das Linienelement ds^2 leitet sich aus dem totalen Differential einer Kurve ab
- Es wird Linien- oder Bogenelement genannt

Wie sieht das Linienelement in den verschiedenen Koordinatensystemen aus?