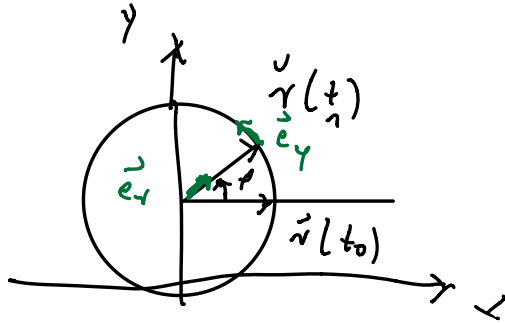




$$|\vec{r}| = R = \text{const}$$

$$\vec{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Polar koordinaten:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$
im kart. KO-System (x, y)

Zurück zur kreisförmigen Bahnkurve:

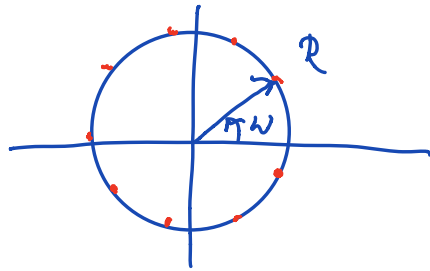
$$\vec{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Da $\varphi = \varphi(t)$ zeitabhängig:

$$\vec{r}(\varphi(t)) = R \left(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)) \right) \quad (\star)$$

1. Fall: konstante Drehgeschwindigkeit, d.h.
Weg um 2π braucht jeweils die
Zeit T :

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi}{T} = \text{const.}$$



gleichmäßig verteilter
Punkte $\hat{=}$ Ortsvektoren
in gleichen
Zeitabständen

Bogenkurve:

$$\underline{\omega = \frac{2\pi}{T} = \text{const.}} = \dot{\varphi} = \underline{\frac{d\varphi}{dt}} \quad | \int$$

$$\int_0^t \omega dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi$$

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

Häufig: Wähle $\varphi_0 = \varphi(t=0) = 0$

Aus (*) ergibt sich:

$$\vec{v}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = R \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } |\ddot{\vec{v}}(t)| = R \omega \sqrt{(-\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2} \\ = R \omega$$

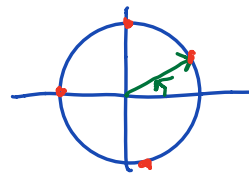
$$\ddot{\vec{v}}(t) = R \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \\ = -R \omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \vec{a}(t)$$

$$|\vec{a}(t)| = R \omega^2 \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = R \omega^2$$

2. Fall: allgemeine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) := \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

infinitesimale
Änderung



nicht mehr
äquidistante
Abstände

$$\int_0^t \omega(t) dt = \int_{p_0}^{p(t)} d\varphi$$

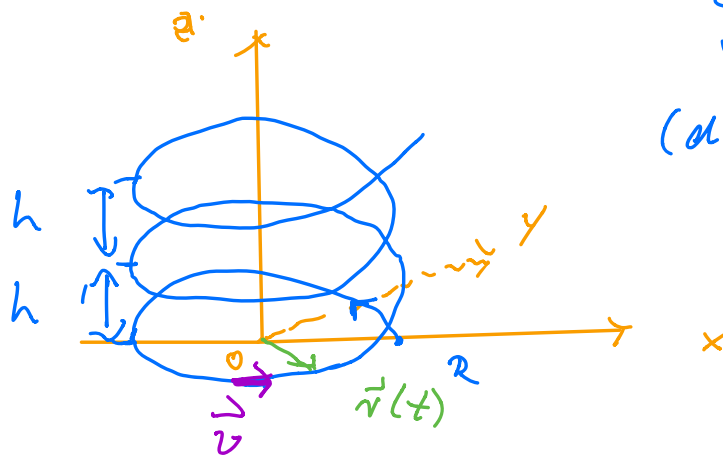
1.7.3 Zusammengesetzte Bewegungen

Ziel: aus geradlinigen + kreisförmigen Bewegungen

→ beliebige Bewegung zusammensetzen

→ Vektoraddition = "Superpositionsprinzip"

Beispiel: Spiralbewegung



Ganghöhe h
(d.h. h / Umdrehung)

Ortsvektor $\vec{r}(t)$ durchläuft eine Spiralbewegung um die z -Achse.

Wie beschreiben wir diese Bahnkurve?

→ ① Rotation in $x-y$ -Ebene um Ursprung

② Geradlinige Bewegung in z -Richtung vom Ursprung aus

zu (1.): $\vec{r}_{(1)}(t) = R (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$

und

zu (2.): $\vec{r}_{(2)}(t) = (0, 0, v_z t)$

Wie hängen diese Bewegungsanteile nun zusammen?

⇒ Prinzip der Periodizität: feste Bedingung durch Ganghöhe!

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \vec{r}_{(2)}(t=T) = \vec{r}_{(2)}\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = (0, 0, \underbrace{v_z \frac{2\pi}{\omega}}_{=h})$$

$$\hat{=} (0, 0, h)$$

$$v_z \frac{2\pi}{\omega} = h \rightarrow v_z = \frac{h\omega}{2\pi}$$

Nun die Überlagerung:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{(1)}(t) + \vec{r}_{(2)}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), \frac{h\omega}{2\pi} t)$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), \frac{h\omega}{2\pi})$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t), 0)$$

Wie groß sind $|\vec{v}|$ und $|\vec{a}|$ einer
Spiralbewegung?

$\Rightarrow$ Beträge bilden und mit einer reinen

Kreisbewegung vergleichen:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2\omega t + R^2\omega^2 \cos^2\omega t + \frac{h^2\omega^2}{4\pi^2}} \\ &= \sqrt{R^2\omega^2 + \frac{h^2\omega^2}{4\pi^2}} = R\omega \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2} \\ &> R\omega \end{aligned}$$

"Geschwindigkeit höher, da Strecke länger
ist als bei einer reinen Kreisbewegung!"

$$|\vec{a}| = \sqrt{R^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + R^2 \omega^4 \sin^2 \omega t + 0}$$

$$= \sqrt{R^2 \omega^4} = R \omega^2 \quad \checkmark$$

= Beschleunigung wie vorher, da Spiralum-
drehung der Kreisbewegung entspricht!)

1.8 Bogenlänge

Otto, 6.3

Frage: Welche Strecke legt ein Körper längs
der Kurve $\vec{r}(t)$ zu einem bestimmten
Zeitpunkt t zurück?

