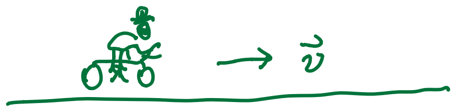
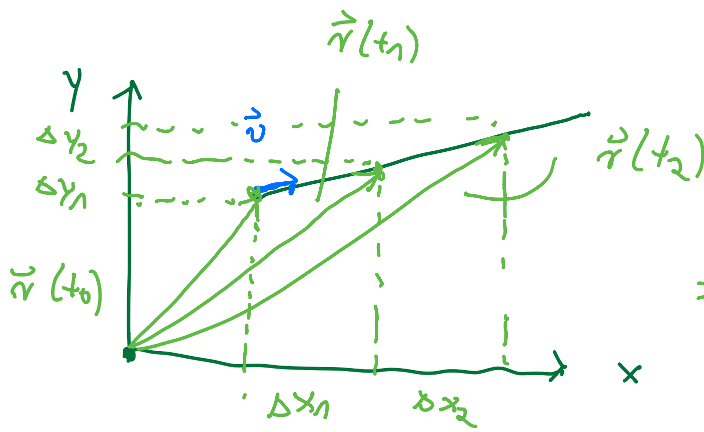
1.7 Bahnkurven von geraden und kreisförmigen Bewegungen

1.7.1 Geradlinige Bewegung

Bsp.:



a) Fahrrad fährt entlang einer Straße mit konst. Geschwindigkeit $\vec{v}_0$



gleichförmige Bewegung
$\hat{=}$ konst. $\vec{v}$

$\Rightarrow$ Punkte äquidistant verteilt für gleiche Zeitabstände

Bahnkurve:

Bekannt: $v = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{"Weg"}}{\text{"Zeit"}}$ (1-Dim)

$\Delta s = v \, \Delta t$

$\Delta s \hat{=} ds$
$\Delta t \hat{=} dt$

infinitesimal

$$ds = v\,dt \qquad | \int$$

$$\int_{s(t_0)}^{s(t_1)} ds = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt$$

$$s(t_1) - s(t_0) = v \int_{t_0}^{t_1} dt = v(t_1 - t_0) \overset{t_0=0}{=} vt$$

$$\Rightarrow \quad \| \; s(t) = s(t_0 = 0) + vt \; \|$$

Nun: Beschreibung in 2 oder 3 Dimensionen

$\Rightarrow$ ersetze s durch $\vec{r}(x, y, z)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t$$

$\hat{=}$ Geradengleichung mit Steigung $|\vec{v}|$

$$\| \; g(\lambda): \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}\,\lambda \; \|$$

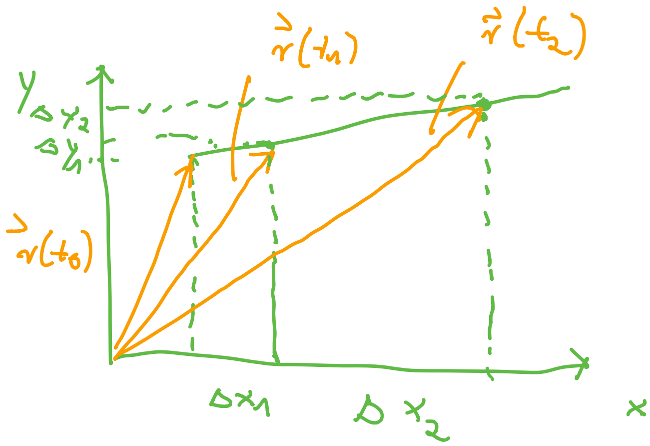
Geschwindigkeit:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \overset{hier}{=} \text{const.}$$

Beschleunigung:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \overset{v=const.}{=} 0 \quad , \text{da } v = const.$$

b) Rennrad leitet Überholvorgang ein und beschleunigt, $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) \neq 0 = \vec{a}_0$



beschleunigte Bewegung

$\hat{=} \; \vec{v}(t)$

↑

t-abhängig

$\Rightarrow$ Punkte nicht mehr äquidistant für gleiche Zeitabstände!

Ziel: Bahnkurve für beschleunigte Bewegung herleiten

Da $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t)$

$$\Rightarrow \quad d\vec{v}(t) = \vec{a}(t)\,dt \overset{hier}{=} \vec{a}_0\,dt \quad \Big| \int$$

$$\int_{\vec v(t_0)}^{\vec v(t)} d\vec v(t) = \int_{t_0=0}^{t} \vec a_0 \, dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec v(t) = \vec a_0 \int_0^t dt + \vec v_0$$

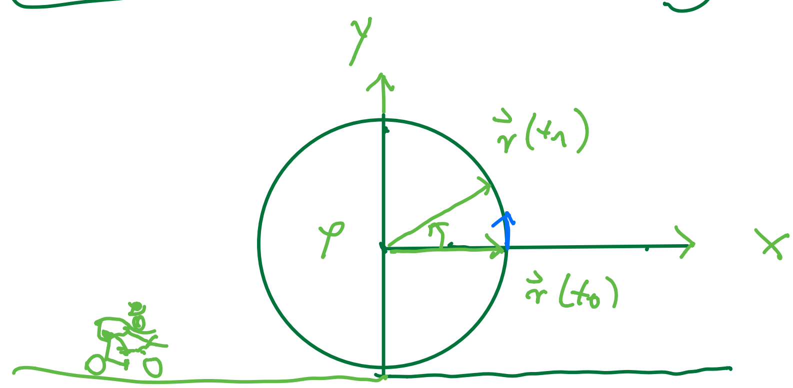
$$= \vec a_0 \, t + \vec v_0$$

$\vec v(t) = \frac{d\vec r}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \vec r(t) = \frac{1}{2} \vec a_0 t^2 + \vec v_0 t + \vec r_0$$

Bahnkurve einer geradlinig beschleunigten Bewegung

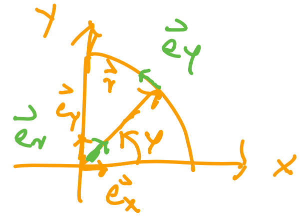
1.7.2 Kreisbewegung (2D)



$$|\vec r(t)| = R$$

Drehbewegung: Polarkoordinaten geeignet

Einschub: Polarkoordinaten r, φ (ebene Bewegung)



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad (*)$$

Jeder Punkt der Ebene (x, y) ist erreichbar

mit $r = [0, \infty[$ und $\varphi = [0, 2\pi]$

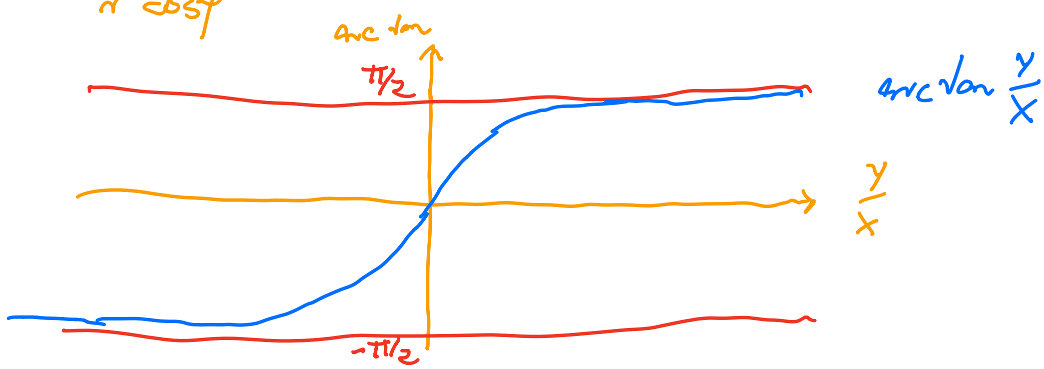
Umrechnung von kartesischen Koordinaten (x, y) auf Polarkoordinaten (r, φ):

- Quadrieren und addieren von $(*)$:

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2$$

- Dividieren von $(*)$:

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi \quad \text{d.h.} \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$



Basisvektoren der Polarkoordinaten in kart. Komp.:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

→ radial nach außen

gesucht: orthogonaler Vektor $\vec{e}_\varphi$ zu $\vec{e}_r$ mit Länge 1

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi \overset{!}{=} 0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\varphi_x} \\ e_{\varphi_y} \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\varphi \, e_{\varphi_x} + \sin\varphi \, e_{\varphi_y}$$

Wähle: $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ ("–" bei x-Komp., da Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn!)

D.h. $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ in kartesischen Koordinaten x, y.

Kronecker Delta:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$