

Vektorprodukt und doppelte Vektorprodukte:

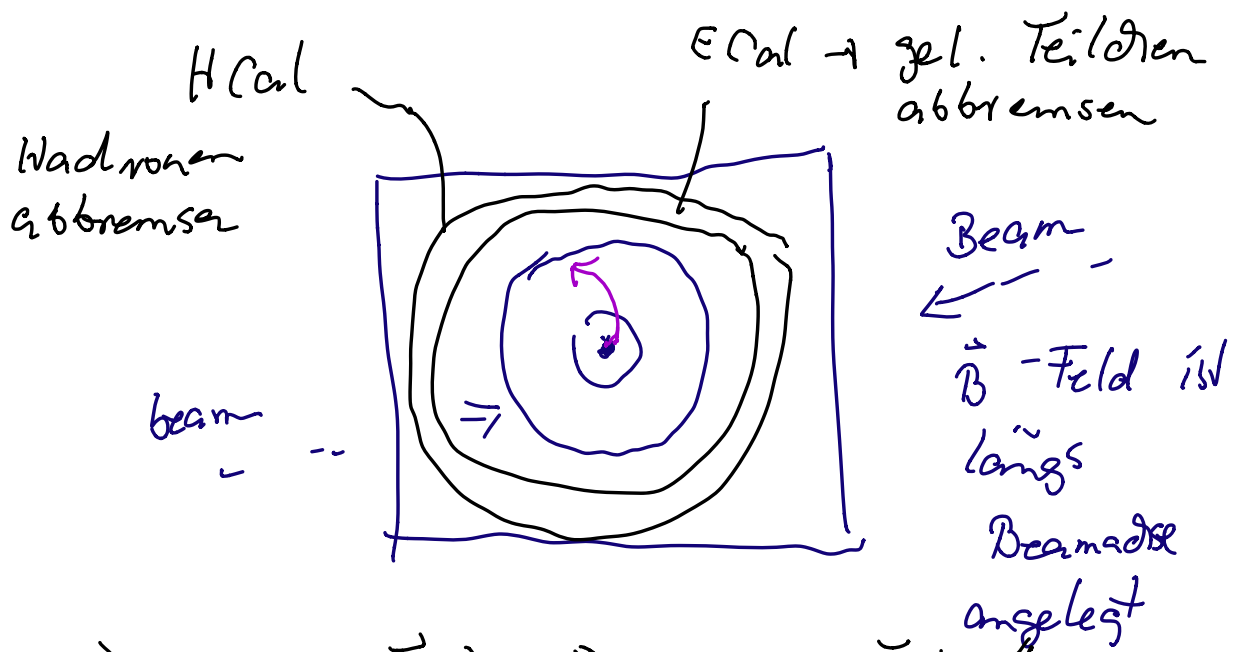
$$\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}), \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}),$$

... $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$, ... im Prinzip bekannt.

Wofür brauchen wir das?

Anwendungen: häufig, wenn Lorentzkräfte auftreten!

$$\text{Lorentzkraft} \quad \vec{F} = q \vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B})$$

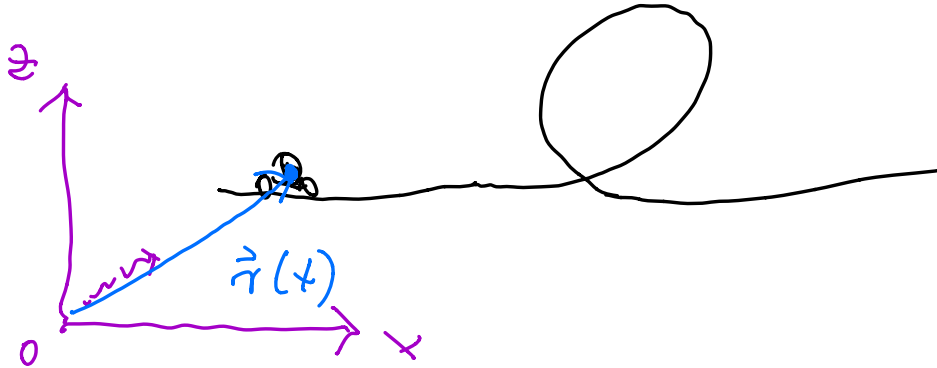


→ $\vec{F} \propto q (\vec{v} \times \vec{B})$ → Impuls der Teilchen aus der Bahnkrümmung bestimmen!

1.6 Vektorgleichungen

01.10, 1.9

Was ist das? Wofür brauchen wir das?



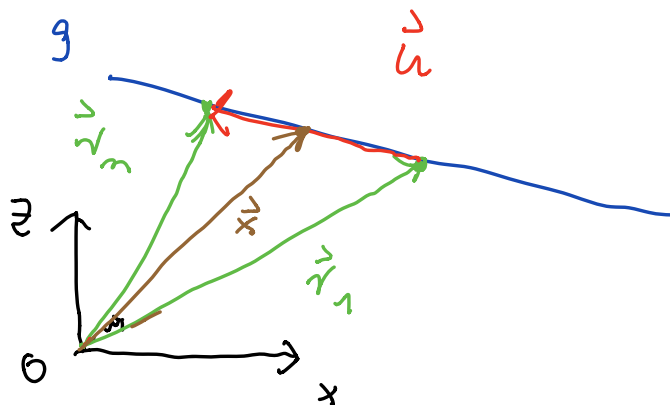
Ziel: alle Bahnkurven, d.h. auch
Kurven / Formen mit Hilfe von
Koordinatensystemen und Vektoren
ansprechen.

Vektorgleichungen $\hat{=}$ Gleichungen, die

{ Geraden
Ebene
Kreis
Kugeln

vektoriell beschreiben!

1.6.1 Gerade



Vorgehen:
 $\vec{u} = \vec{r}_m - \vec{r}_1$ be-
schreibt Richtung
der Geraden

Parametrisierung, damit alle Punkte abge-
lesen werden können:

$$\lambda \vec{u} = \lambda (\vec{r}_m - \vec{r}_1)$$

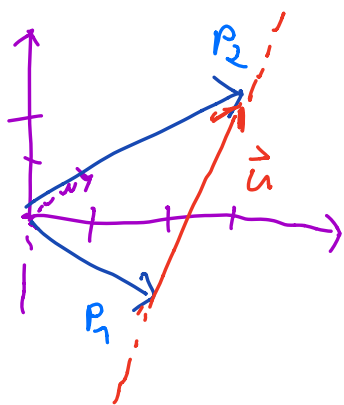
Alle Punkte auf der Geraden g werden
durch Ortsvektoren $\vec{r}_i$, $i=1, \dots, n$, ∞
beschrieben.

Die Menge aller Punkte $\vec{x}$ auf der
Geraden g lässt sich parametrisieren!

$$g(\lambda): \quad \vec{x} = \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_m - \vec{r}_1) = \\ = \vec{r}_1 + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \text{ Parameter}$$

Aufgabe: Bestimme die Geradengleichung, die eine Gerade beschreibt, die durch die Punkte $P_1 = (2, 1, -1)$ und $P_2 = (3, 1, 2)$ geht. $\vec{r}_1$

$\vec{u} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



$$g(\lambda): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oder

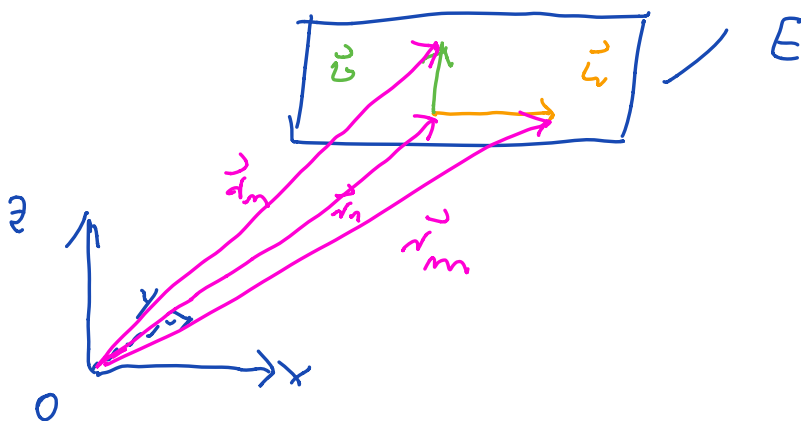
$$g(\lambda'): \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda' \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ beschreibt Gerade g (nur mit anderen "Richtungsvektor")

1.6.2 Ebene

Idee 1, "Man nehme eine Gerade und einen weiteren Richtungsvektor, der in eine andere Richtung zeigt."



Ebene:

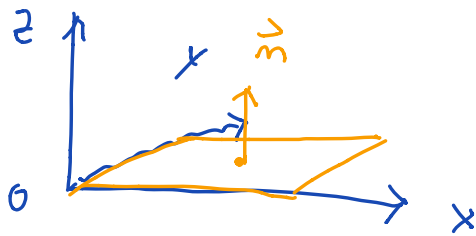
$$\begin{aligned} E(\lambda, \mu): \vec{X} &= \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_m - \vec{r}_1) \\ &\quad + \mu(\vec{r}_n - \vec{r}_1) \\ &= \vec{r}_1 + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ alle Punkte $\vec{X}$ auf der Ebene E
mit λ, μ beschreibbar.

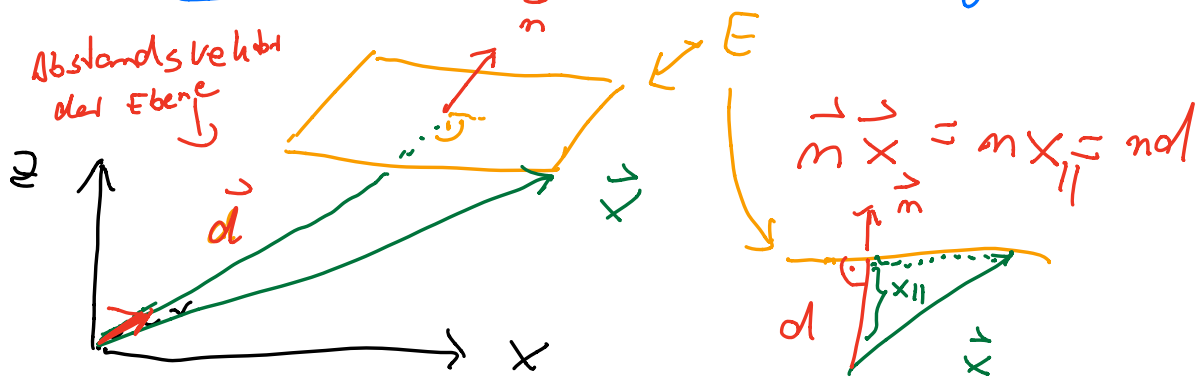
Satz 2: Eine Ebene (durch den Ursprung)
mittels des Normalenvektors $\vec{n}$
beschreiben.

$\Rightarrow$ alle Vektoren $\vec{x}$ in der Ebene sind
 $\perp$ zu $\vec{n}$, d.h. es muß gelten:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = 0 = n_1 x + n_2 y + n_3 z$$



Allgemeiner Fall, d.h. Ebene beliebig
(d.h. nicht durch den Ursprung)

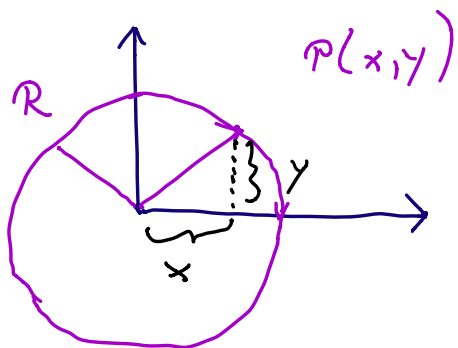


=> Herste'sche Normalenform einer Ebene:

$$\vec{n} \vec{x} - n d = 0$$

$$\left| \text{d.h.} \quad \frac{\vec{n}}{n} \vec{x} - d = \vec{e}_n \vec{x} - d = 0 \right. \quad \left. \right|$$

1.6.3 Kreisgleichung



Kreisgleichung:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

oder in anderen
Schreibweise

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

⇒ Als Skalarprodukt schreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

d.h.

$$(\vec{x})^2 = R^2 \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen Fall, d.h. Mittelpunkt

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \neq 0 :$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix} = R^2$$

$$\text{bzw. } (\vec{x} - \vec{x}_0)^2 = R^2$$

$$\text{d.h. } |\vec{x} - \vec{x}_0| = R$$

1.6.4 Kugel $\Rightarrow$ Kreis in 3-Dim.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{bzw.}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Vektorielle Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ x_3 - x_{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ x_3 - x_{30} \end{pmatrix} = R^2$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

$$\vec{x} - \vec{x}_0$$

$$\text{d.h. } (\vec{x} - \vec{x}_0)^2 = R^2$$

$$\text{bzw. } \parallel \vec{x} - \vec{x}_0 \parallel = R$$

1.7 Bath Curve