

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad \text{"auswendig lernen" o.h.}$$

Regel von Sarrus?

$\hat{=}$ Herleitung mittels $\rightarrow$ Determinanten

$\hat{=}$ Herleitung mittels Levi-Civita-Tensor

Warum nicht/nicht einfach "Regel von Sarrus"?

$\rightarrow$ Verallgemeinerung auf Dimension > 3 !

$\rightarrow$ z.B. - später, Relativitätstheorie -

Vektoren in 4 Dimensionen $(x, y, z \text{ und } t)$

- Komponenten Schreibweise mit Levi-Civita-Tensor

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

NR.: "3-fach indiziert" = 3 Indizes

= "total antisymmetrisch" = vertauscht

man 2 Indizes $\rightarrow$ gibt's ein $\ominus$

$$\sum_{i,j} \epsilon_{iij} = - \sum_{i,j} \epsilon_{iij} = 0$$

= "Tensor": z.B. mit 2 Indizes

$g_{\mu\nu}$ "hat anderes Verhalten

$\nearrow \nwarrow$ unter Rotation wie ein Vektor"

Zurück zum Levi-Civita-Symbol:

$$\varepsilon_{ijk} \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} i, j, k \text{ zyklisch} \\ \text{wenn mind. zwei Ind. gleich} \\ \text{antizyklisch} \end{array}$$

Wie benutzt man ε_{ijk} ?

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Man nehme explizit: $i=1$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \sum_{j,k=2}^3 \varepsilon_{1jk} a_j b_k =$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{123}}_{(+1)} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1} a_3 b_2$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2$$



$$(\vec{a} \times \vec{b})_{i=2} = \sum_{j,k=1,3} \epsilon_{2jk} a_j b_k$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_{i=3} = \sum_{j,k=1}^2 \epsilon_{3jk} a_j b_k$$

Ausblick / Vertiefung: Was bei 4-Dim.?

→ 4-dim Matrix schreiben

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ \textcircled{6} & \textcircled{6} & \textcircled{0} & \textcircled{6} \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$+ \textcircled{+} \left| \text{untermatrix} \right| - \textcircled{-} \left| \text{untermatrix} \right|$$

$$+ \textcircled{+} \left| \text{untermatrix} \right| = \textcircled{+} \left| \text{untermatrix} \right|$$

Doppelte Produkte:

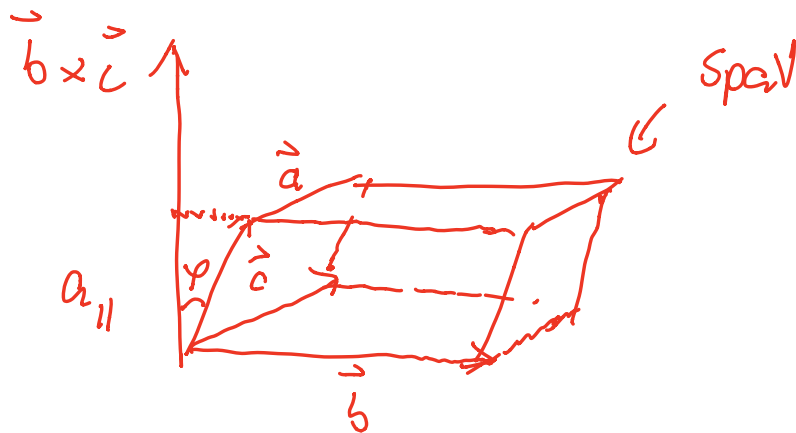
a) Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{a}| |\vec{v}| \cos \varphi$$

$\uparrow$
Vektor $\cdot$ Vektor
Zahl, Skalar

$$= |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \varphi$$

$\hat{=} V$ (Volumen des Spats)



Eigenschaften:

- zyklisch: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$$\Rightarrow \text{d.h.} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) = 0$$

b) Doppeltes Grenzprodukt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \overbrace{(\vec{a} \cdot \vec{c})}^{\text{Skalarprodukt}} - \vec{c} \overbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}^{\text{Skalarprodukt}}$$

$\uparrow$
Vektor $\times$ Vektor
bleibt Vektor

$= b_{ac} - c_{ab}$

Vorstellung:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

nicht ehlich!

$$\begin{aligned}
 \text{NR: } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \\
 &= -\left\{ \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \right\} \\
 &= -\vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})
 \end{aligned}$$

Status: Im Prinzip sind nun alle
Verknüpfungsarten bekannt!

$$\text{Anwendung: } \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{v}} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = ?$$

$\Rightarrow$ d.h. zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{c}(\vec{d} \times \vec{v}) = \\
 &= \vec{c} \underbrace{[\vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b})]}_{\text{"bac-cab" Regel}}
 \end{aligned}$$

$$= \vec{c} \left[\vec{a} \underbrace{(\vec{d} \vec{b})}_{\text{skalar}} - \vec{b} \underbrace{(\vec{d} \vec{a})}_{\text{skalar}} \right]$$

$\nearrow$ vektor
 $\uparrow$ vektor
 $\uparrow$ vektor

$\Rightarrow$ d.h.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{c} \vec{a})(\vec{d} \vec{b}) - (\vec{c} \vec{b})(\vec{d} \vec{a})$$

$$= \text{skalar} !$$