

Fragestunde: 19.7. 14-15 Uhr
selbe Link wie für Freitags-Fragestunde

Erzwungene Schwingungen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\tilde{\omega}t) + 0 \quad (\diamond)$$

Lösung:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{speziell}}(t)$$

Ansatz: Lösung von $(\diamond)$

$$\text{I. } x_{\text{speziell}} = C \cos(\tilde{\omega}t - \gamma) = \text{Re}[C e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}]$$

mit 2 Konstanten C, γ , die aber bereits komplex festgelegt sind.

$$\text{II. } \dot{x}_{\text{speziell}} = \text{Re}[C i\tilde{\omega} e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}]$$

$$\ddot{x}_{\text{speziell}} = \text{Re}[-C \tilde{\omega}^2 e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}]$$

zurück zur allg. Lösung der Dgl. mit
äußeren Kraft:

→ Superposition der homogenen und der inhomogenen
Lösung

$$x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{spez.}} = \underbrace{A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta)}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty} + \frac{F_0}{\gamma} \cos(\tilde{\omega} t - \gamma)$$

Frequenz des gedämpften
Systems: $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

$$\text{d.h. } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}$$

externe
Frequenz

"steady state
solution"
(SSS)

Note: $x(t)$ hat 2 Konstanten A, δ

→ Anfangsbedingungen

↑
vorherrschend
für große t

Ab jetzt sehen wir uns die "SSS"-Lösung

genauer an, Thema "Resonanzeffekte":

Bei welcher Frequenz $\tilde{\omega}$ wird die Amplitude

$$C = \frac{F_0}{\gamma} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + b^2 \tilde{\omega}^2}} \quad \text{der "SSS" maximal?}$$

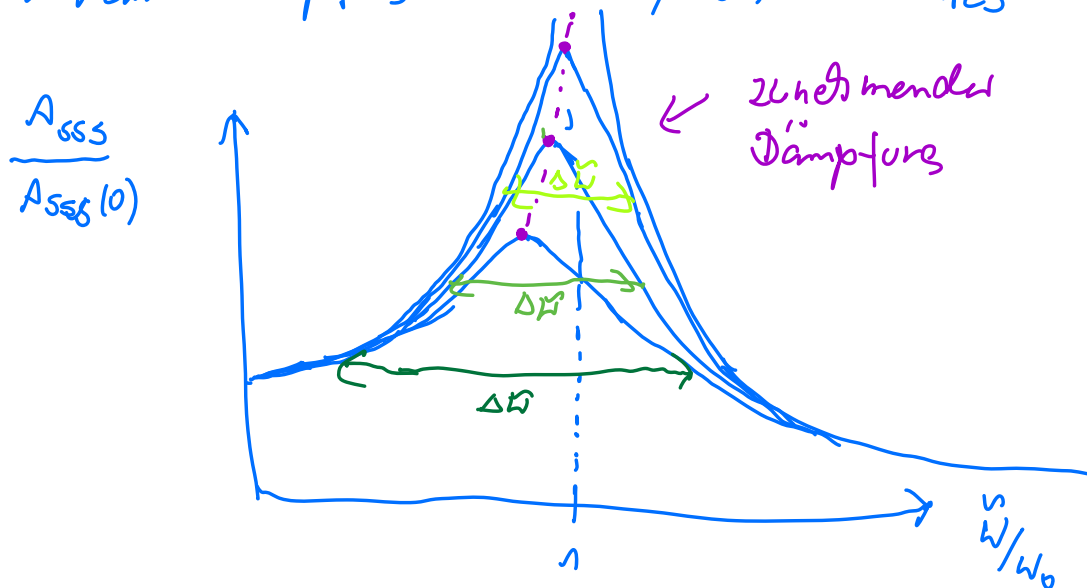
↓
Ableitung

$$\frac{d}{d\tilde{\omega}} \left[\frac{F_0}{\sqrt{1 - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}^4 + b^2}} \right] \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{1}{2} \frac{F_0 [-2m^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) + b^2]}{\sqrt{\quad}^3}$$

Zähler muss null sein: $\tilde{\omega}_{\text{res}}^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b^2}{2m^2}\right)$

• Falls Dämpfung null ist: $\tilde{\omega}_{\text{res}} = \omega_0$

• Falls Dämpfung nicht null, $b \neq 0$: $\tilde{\omega}_{\text{res}} < \omega_0$



Breite der Resonanzkurve:

Definition: $\Delta \tilde{\omega}$ bei Hälfte des Maximums $\frac{A_{\text{res}}^2}{2}$

$$\left\| \Delta \tilde{\omega} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\omega_0}{\omega_0 m/b} = \frac{b}{m} \right\|$$

↑
quality factor

① Diskussion der Phase γ in $x_{\text{spez}} = C \cos(\tilde{\omega}t - \gamma)$:

$$\tan \gamma = \frac{b \tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

Fälle:

i) Falls externe Frequenz $\tilde{\omega} = 0$

$$\tilde{\omega}^2 = 0 \rightarrow \tan \gamma = 0 \rightarrow \gamma = 0$$

ii) Falls externe Frequenz $\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2$:

$$\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 \rightarrow \tan \gamma = \infty \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Phase um $\frac{\pi}{2}$ verschoben!

iii) Falls externe Frequenz $\tilde{\omega}^2 = \infty$:

$$\tilde{\omega}^2 = \infty \rightarrow \tan \gamma = \frac{b \tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \Big|_{\infty}$$

$$= \frac{b / \tilde{\omega}}{m \left(\frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} - 1 \right)} = - \frac{b / \tilde{\omega}}{m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} \right)}$$

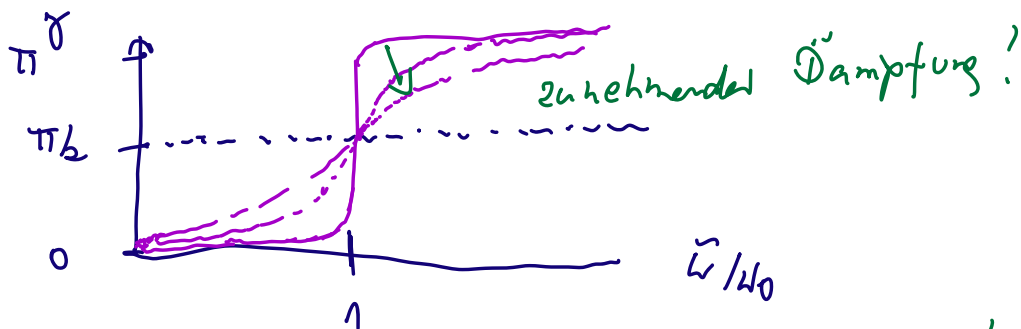
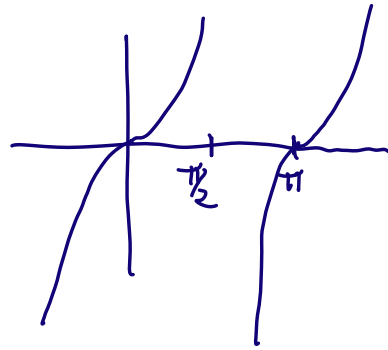
Taylorentwicklung für $\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1+x$

$$\approx - \frac{b / \tilde{\omega}}{m} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} \right)$$

$$\approx - \frac{b / \tilde{\omega}}{m} \cdot 1 \xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} = -0''$$

⇒ D.h. die Phase $\varphi = \pi$

= "anti-phase"



Lit.: z.B. v. Valder, Praktikum der Physik, Kap. 7

Was sind Wellen?

Wellen = Schwingung $f(x, t)$

Resonanzeffekte: please have a look:

Keywords: Resonanz, Brücke, Tacoma

[https://www.youtube.com/watch?v=3mc\(p\)QmCAs](https://www.youtube.com/watch?v=3mc(p)QmCAs)