

2B x Reibungsform

$$b) \omega_0^2 = \beta^2 : \lambda = -\beta$$

→ 1 reelle Lösung

I. $e^{\lambda t}$

II. Mod. Ansatz $t e^{\lambda t}$

Fall b) charakterist. Polynom

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

→ nur eine Lösung: $\lambda = -\beta$

Bildung der 2 unabhängigen Lösungen:

$$e^{\lambda t} = e^{-\beta t} \text{ und } t e^{\lambda t} = t e^{-\beta t}$$

⇒ Allg. Lösung ist Linearkombination:

$$x(t) = e^{-\beta t} [\underbrace{A_1}_{\text{Konstante}} + \underbrace{A_2}_{\text{Konstante}} t]$$

wieder 2 Konstanten!

⇒ keine Schwingung, geht gegen 0 für $t \rightarrow \infty$

9) $\omega_0^2 < \beta^2$:

→ keine Schwingung

↳ Wie oft?

Wie vorher:

allg. Lsg = Linearcomb. beider Lösungen,
hat 2 Konstanten A_1, A_2
Integrationsbed.

Zusfassung: gedämpfte Schwingungen

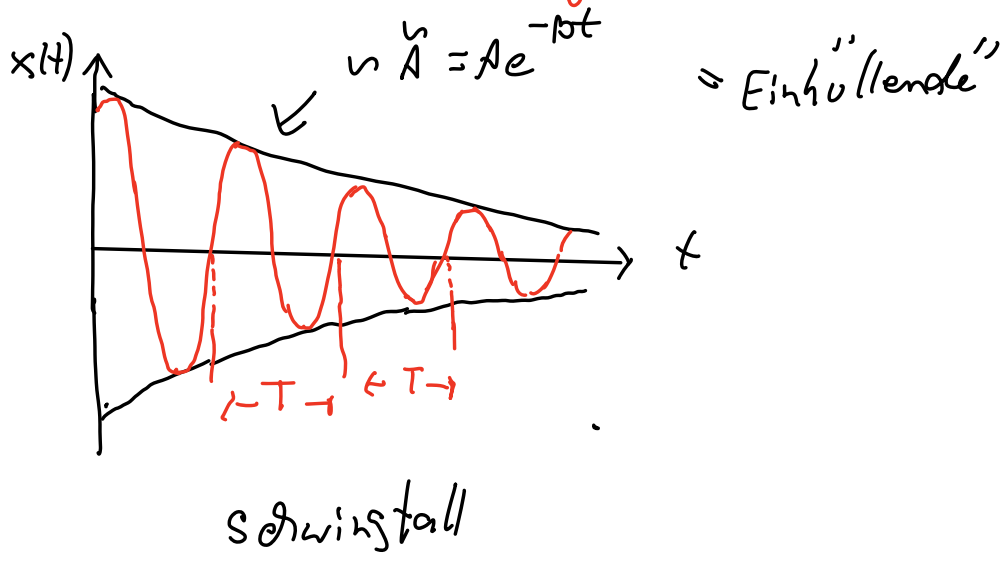
3 Fälle:

a) unterkrit. Dämpfung

$$\omega_0^2 - \beta^2 > 0$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\ddot{A}(t)} \underbrace{A \cos(\omega t - \delta)}_{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ Oszillations sterben langsam aus



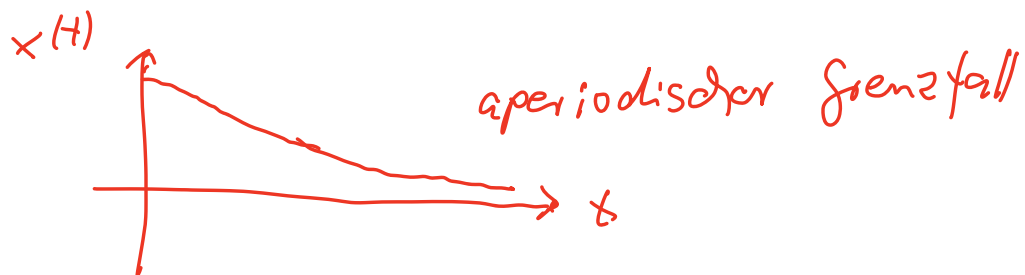
b) krit. Dämpfung $\omega_0^2 = \beta^2$

$\rightarrow$ minimale Dämpfung, um gerade keine

Schwingung zu bekommen:

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 + A_2 t] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

geht schnellstmöglich gegen Null!

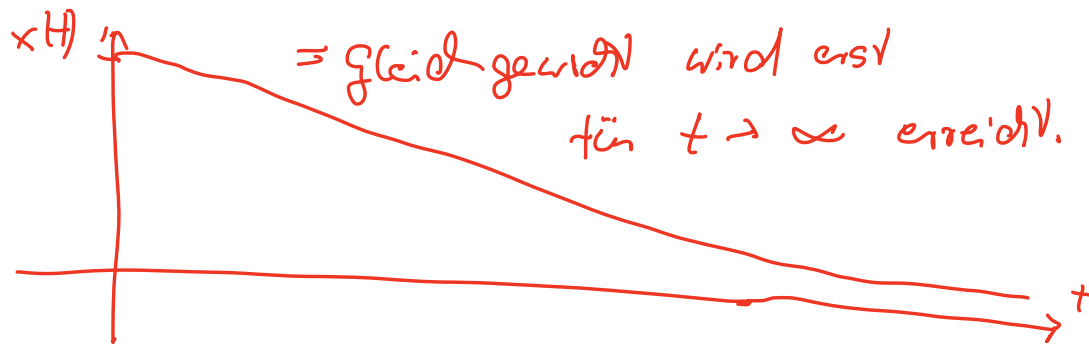


c) überkrit. Dämpfung $\omega_0^2 < \beta^2$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(A_1 e^{+\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

$t \rightarrow \infty \rightarrow 0$

geht "langsam" gegen Null!
"Überschlag"



Energie einer gedämpften Schwingung

Falls keine Dämpfung:

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \eta A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \hookrightarrow A^2 = \text{const.}$$

Nun im gedämpften Fall:

Dämpfung verrichtet Arbeit, d.h. verringert die Energie, die im System steckt!

Analog zum ungedämpften Fall, kann man zeigen:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 \tilde{A}(t)^2$$

↑ ↑
 Frequenz zeitabhängige Amplitude
 des gedämpften Systems

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}_{E_0} e^{-2\beta t} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

E_0
 Anfangsenergie

$\tau = \frac{m}{b}$
 Zeitkonstante

Q-Faktor:

Gedämpfte Oszillationen werden durch den

"Q"-Faktor (quality factor) charakterisiert:

$$Q = \omega_0 \tau = \omega_0 \frac{m}{b}$$

$$\Rightarrow E = E_0 e^{-t \frac{\omega_0}{Q}}$$

$\Rightarrow$ Q gibt Information über den Bruchteil der Energie, der pro Zyklus durch die Reibung verloren geht.

Erzwungene harmon. Schwingungen und Resonanzverhalten

Bisher:

a) $m\ddot{x} + kx = 0$ "homogene" Dgl

$$x_{\text{hom}}(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta) \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

b) $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ "homogene" Dgl

$$x_{\text{hom}}(t) = \tilde{A}(t) \cos(\omega t + \delta) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta)$$

c) + äußere Kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\tilde{\omega} t + \varphi) (\diamond)$

ih. homogene Dgl.

- Nach gewisser Zeit: herrscht die äußere Kraft

$$x_{\text{ext}}(t) = x_{\text{speziell}}(t) \sim \cos(\tilde{\omega} t)$$

- Lösung der homogenen Dgl. (ösi ebenfalls $(\diamond)$,

da sie "tot" ergibt, d.h. nicht schau!

→ muß dazu addiert werden!

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{speziell}}(t)$$

Am Beginn: Bewegung ist Superposition der
gedämpften Schwingung mit der
erzwungenen Schwingung

Resonanzeffekte

$$x_{\text{speziell}}(\tilde{\omega} \rightarrow \omega_0) \rightarrow \infty$$

Lösung von ($\diamond$):

$$\text{Ansatz: I. } x_{\text{speziell}} = \underbrace{(C)}_{\substack{\text{weder 2 Konstanten,} \\ \text{haben nichts mit Anfangsbedingungen zu tun,} \\ \text{sondern sind bereits vollständig bestimmt,} \\ \text{siehe Donnerstag!}}} \cos(\tilde{\omega} t - \underbrace{\gamma}_{\substack{\text{externe Kraft rennt} \\ \text{immer voran}}}) = \text{Re}[C e^{i(\tilde{\omega} t - \gamma)}]$$