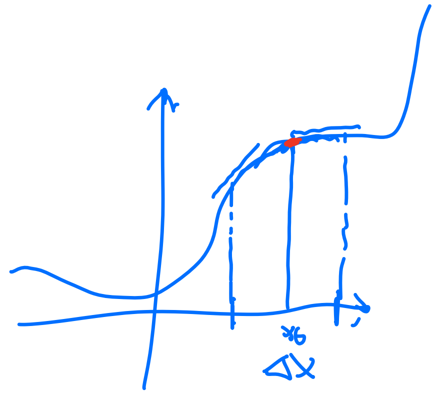
Taylor'sche Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^{\nu}$$



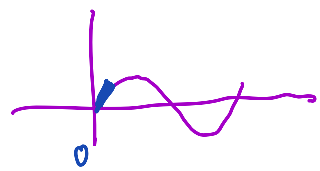
Fall $x_0 = 0$: Mac Laurin'sche Reihe

Bsp.: $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$



wähle $x_0 = 0$:

$f^{(1)}(x_0) = 1 = (-1)^0$

$f''(x_0) = 0$

$f^{(III)}(x) = -1 = (-1)^1$

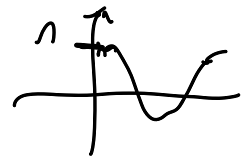
$\Rightarrow$ nur ungerade Ableitungen bleiben über

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(2m+1)}(x_0 = 0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_n$$

$$= \ldots = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_n ,$$

wobei $$R_n = \frac{f^{(2n+1)}(\vartheta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \frac{\underbrace{\pm \cos(\vartheta x)}_{|\cos(\vartheta x)| \leq 1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$



$$\stackrel{\lim n\to\infty}{=} 0$$

Test: Wie verhält sich $\frac{x^l}{l!}$?

Bsp.: $x = 2$

$$\left.\frac{x^4}{4!}\right|_{x=2} = \frac{16}{24}$$

$$\left.\frac{x^5}{5!}\right|_{x=2} = \frac{32}{120}$$

$$\left.\frac{x^6}{6!}\right|_{x=2} = \frac{64}{720}$$

$\Rightarrow \lim n \to \infty \Rightarrow 0$

D.h. $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{1!} x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 -$$

kleine Winkelnäherung: $\sin x \approx x$!

Taylor Reihe für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ um $x_0 = 0$:

$f^{(0)}(x_0) = 1$

$f'(x)\Big|_{x_0=0} = (-1)\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x_0=0} = (-1)$

$f''(x)\Big|_{x_0=0} = (-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3}\Big|_{x_0=0} = 2$

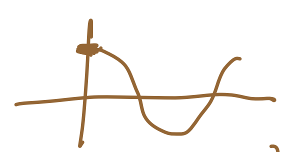
$f'''(x)\Big|_{x_0=0} = (-1)(-2)(-3)\frac{1}{(1+x)^4}\Big|_{x_0=0} = -6$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{x}{1!} + 2\frac{x^2}{2!} - 6\frac{x^3}{3!}$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots + (-1)^n x^n$$

Deshalb nie vergessen:

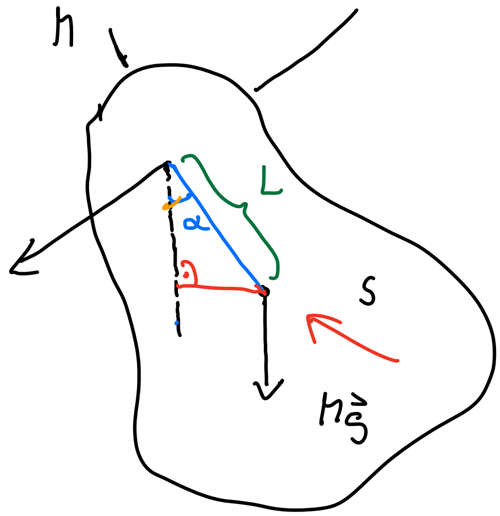
$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ in 1. Ordnung in x!



$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$

Das physikalische Pendel

Physikalische Pendel = fester Körper, rotiert um eine horizontale Achse, die nicht durch den Schwerpunkt läuft.



Drehmoment des Schwerpunktes

$-MgL\sin\alpha = D$

$\Rightarrow$ Da Drehbewegung:

2. Newton'sches Gesetz auf Rotation anwenden:

$$\vec{D} = I \cdot \ddot{\vec{\alpha}}$$

Drehmoment "Kraft" — Trägheitsmoment "Masse" — Winkelbeschleunigung "Beschleunigung"

$\underbrace{\text{"Kraft"} \quad \text{"Masse"} \quad \text{"Beschleunigung"}}_{\text{bei rotierender Bewegung}}$

Vergleich:

Lineare Bewegung		Kreis Bewegung
m	$\longleftrightarrow$	I
$\vec{v}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{\omega}$
$\vec{p}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{L}$
$(= m\vec{v})$		$(= I\vec{\omega})$

Einschub:

Trägheitsmoment : $I = \int r^2 \, dm$

Wie berechnen wir $\int dm$?

(Erinnerung: $\text{Dichte} = \dfrac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$)

a) $\int \underset{\uparrow}{\sigma} \, dA \leftarrow$ Fläche

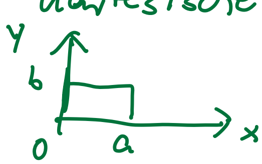
Flächendichte

b) $\int \underset{\uparrow}{\rho} \, \underset{\uparrow}{dV}$

Dichte Volumen

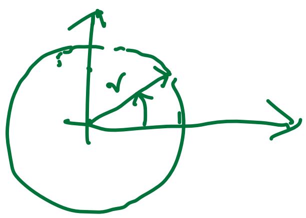
a) Flächenintegrale

kartesische Koordinaten



$$\int_0^a \int_0^b dx \, dy = \int_0^a dx \int_0^b dy = a \cdot b = A_\square$$

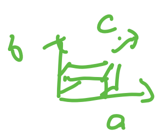
Polarkoordinaten



$$\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\varphi = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2 = A_{\circ}$$

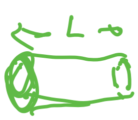
b) Volumenintegrale

kartesische KO: $\int_0^c\int_0^b\int_0^a dx\,dy\,dz = abc = V_{\square}$



Kugelkoordinaten: $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 2\pi\frac{R^3}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}R^3 = V_{Kugel}$$



Zylinderkoordinaten:

$$\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\varphi\,dz = 2\pi\frac{R^2}{2}L = \pi R^2 L = V_{Zylinder}$$

$$I = \int r^2 \, dm = \int \underset{\text{Flächendichte}}{\underset{\uparrow}{\sigma}} \, r^2 \, dA \overset{\text{homogen}}{=} \sigma \int r^2 \, dA$$

$$\overset{\text{Polar}}{=} \sigma \int r^2 \; r \, dr \, d\varphi$$

$\Rightarrow$ Beispiel am Donnerstag für I

Phys. Pendel (Ausblick):

$$D = I \ddot{\alpha}$$

$$\uparrow$$

$$-mgl \sin\alpha = I \ddot{\alpha}$$