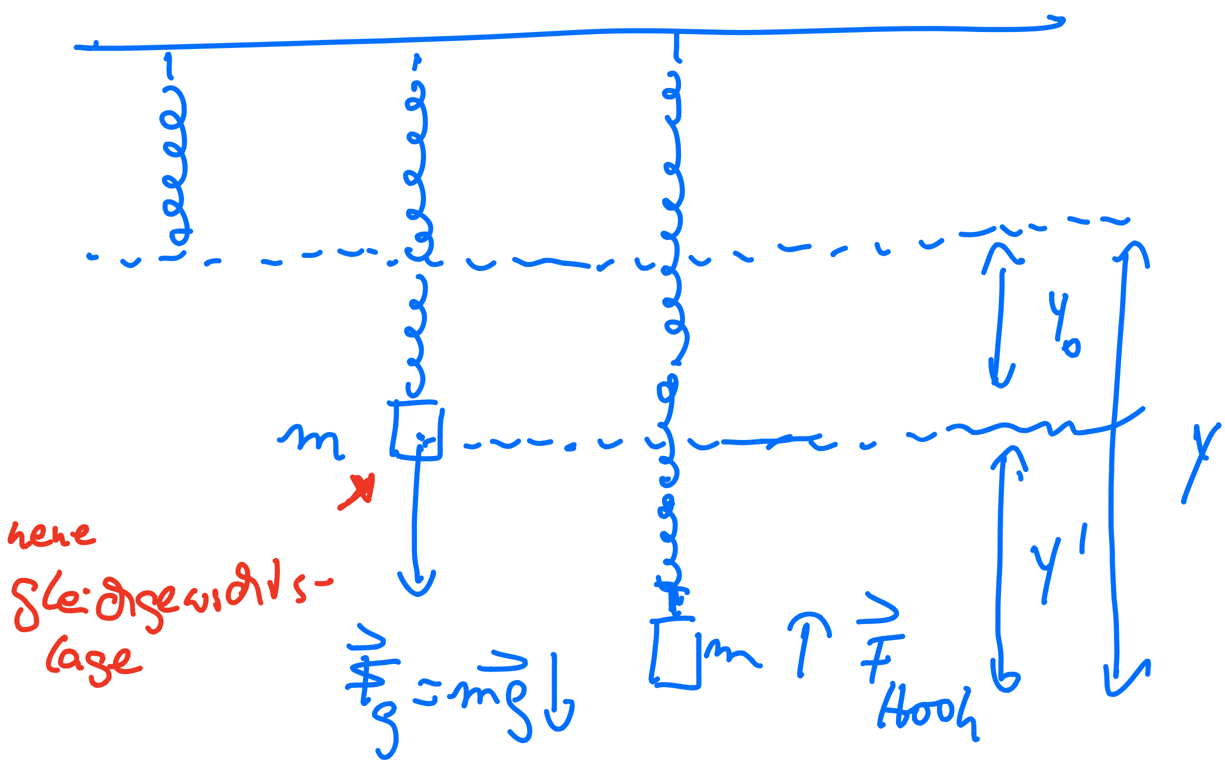
Vertikale Feder im Gravitationsfeld



BGL.: $m a_y = m\ddot{y} = \sum_i F_i = F_{Hook} + F_g$

$$= -k y + mg$$

$$\Rightarrow \text{Bgl}: \; m\ddot{y}(t) = -k y(t) + mg$$

Trick: neue Variable $y' = y - y_0$

$y_0 = \text{const}$ und $\dot{y}_0 = 0$

In Dgl einsetzen: $y = y' + y_0$

$$\dot{y} = \dot{y}' + 0$$

$$\ddot{y} = \ddot{y}'$$

$$\rightarrow \quad m\ddot{y}'(t) = -k(y' + y_0) + mg$$

y_0 bestimmen: $|\vec{F}_{Hook}| = |\vec{F}_g|$

$$k y_0 = mg$$

$$\rightarrow \quad y_0 = \frac{mg}{k}$$

einsetzen:

$$m\ddot{y}' = -ky' \cancel{- \cancel{k} \frac{mg}{\cancel{k}}} \cancel{+ mg}$$

$$m\ddot{y}' = -ky'$$

formal genau wie bei horizontaler Feder!

$\Rightarrow$ ‖ Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
wie im horizontalen Fall! ‖

$\Rightarrow$ Effekt der Gravitationskraft:
bewirkt lediglich eine neue Gleichgewichtsposition!

$\Rightarrow$ Alles wie vorher:

I. Ansatz $y = e^{\lambda t}$, ..., $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

II. Einsetzen in Bgl.:
liefert Eigenfrequenzen $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$
(bzw. Lösungen des charakt. Polynoms)

III. Anfangsbedingungen einsetzen!

$$y(t=0) \overset{\text{allg.}}{=} y_0 \overset{\text{hier}}{=} y_0 \qquad \dot{y}(t=0) \overset{\text{allg.}}{=} \dot{y}_0 \overset{\text{hier}}{=} 0$$

Zusammenhang Winkelfrequenz, Frequenz und Eigenschaft des System:

$$\omega = 2\pi f = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Einschub: Immer Schwingung?

$\rightarrow$ No: a) $\lambda^2 = -\frac{k}{m}$ $\rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$

$$= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Schwingung!

Lösung: $x = A e^{+i\sqrt{\ }t} + B e^{-i\sqrt{\ }t}$

$$= \dots = \tilde{A} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\sqrt{\ }t + \delta)$$

b) $\lambda^2 = \frac{k}{m}$ $\rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$

keine Schwingung!

Lösung: $x = A e^{+\sqrt{\ }t} + B e^{-\sqrt{\ }t}$

$$x(t=0) = A + B$$

$$\dot{x} = A\Gamma e^{+\Gamma t} - B\Gamma e^{-\Gamma t}$$

$$\dot{x}(t=0) = (A-B)\Gamma$$

↳ später: $\underbrace{\text{Falls charakt. Polynom}}_{\text{quadrat. Gleichung bei Dgl. 2. Ordnung}}$ nur <u>eine</u>

Lösung λ_1 hat, dann gibt der

modifizierte exp. Ansatz die

2. Lösung:

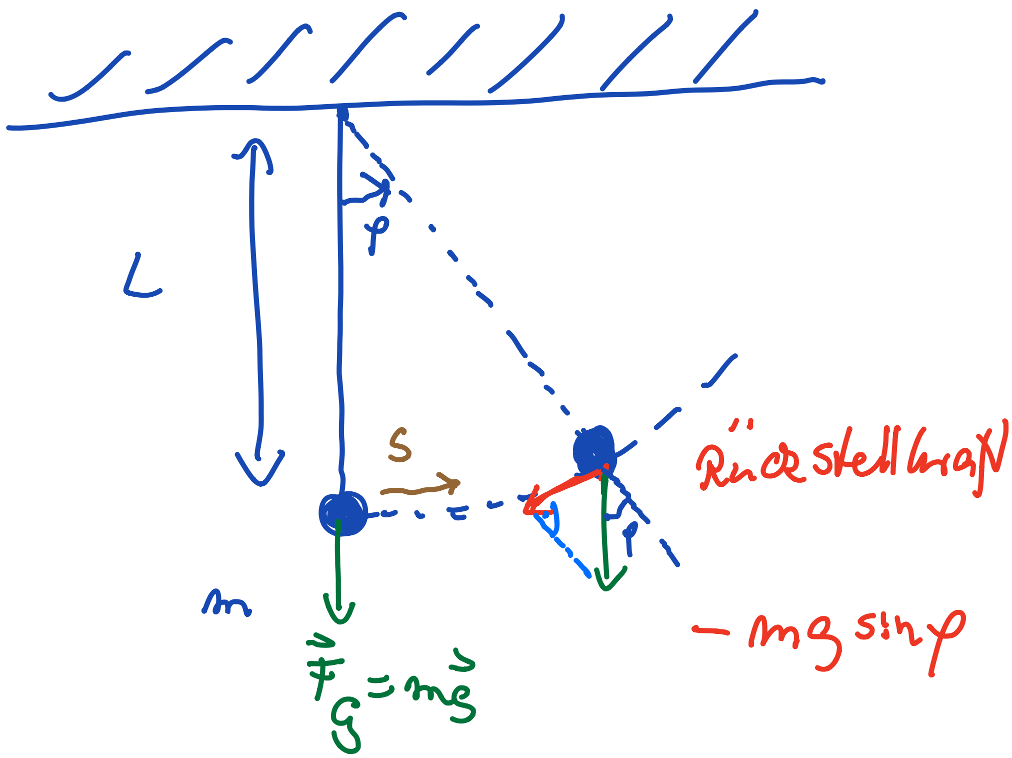
mod. Ansatz: $t e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ Lösung: $x = A e^{\lambda_1 t} + B t e^{\lambda_1 t}$

Einschub Ende!

Mathematisches Pendel (Tipler 14.3.)

Def.: math. Pendel = Faden der Länge L mit Massekörper m und schwingt mit Periode T



Vorüberlegung:

- ebene Bewegung, d.h. 2 Dimensionen genügen zur Beschreibung, z.B. r und φ
- Da Pendellänge konstant ist (= Zwangsbedingung) reicht 1 Koordinate: z.B. s

Wie hängen s und φ zusammen?

$\Rightarrow \quad s = L\varphi$

Dgl.: $$m\ddot{s} = m\frac{d^2 s}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

$$\cancel{m} L\ddot{\varphi} = -\cancel{m} g\sin\varphi$$

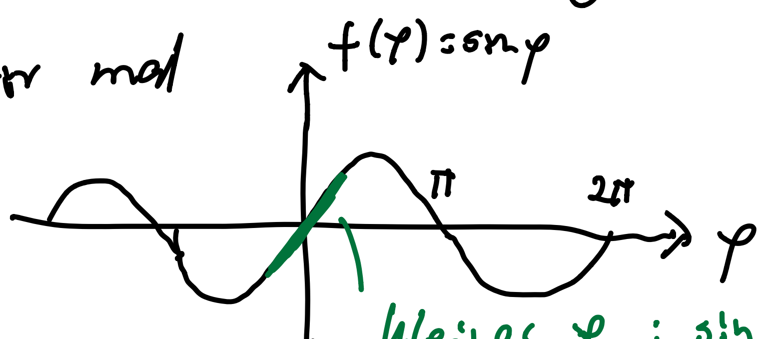
Masse kürzt sich raus!

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\sin\varphi}$$

Wie soll man das lösen? Auf der rechten Seite steht eine Funktion von φ, nicht φ allein! $\Rightarrow$ so nicht lösbar

Vielleicht mit einer Näherung?

Schauen wir mal



kleines φ : $\sin\varphi \approx \varphi$

→ Falls φ klein ist: $\boxed{\sin\varphi \approx \varphi}$

„kleine Winkelnäherung"!

Einsetzen:

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi}$$

D.h. wir lösen diese Bgl. unter der Annahme, daß nur kleine Winkel auftreten.

Notiz: Diese Näherung machen wir immer!

(bis auf genau eine Ausnahme in Theo 1! → wer es jetzt schon wissen will, Nuypers, klass. Mechanik

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Ansatz: $\varphi = e^{\lambda t}$

$$\ddot{\varphi} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

einsetzen: $\lambda^2 = -\frac{g}{L}$

$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{g}{L}} = \pm i\sqrt{\frac{g}{L}} = \pm i\omega$

Lösung: $\varphi(t) = A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$

Euler Formel

$= \ldots C \sin(\omega t + \delta)$

Periodendauer:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (*)$$

längeres L ergibt größere T

Anwendung: Exp. Bestimmung von g mit $(*)$

$$\Rightarrow \qquad g = L\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Versuchsreihe (normalerweise im Hörsaal
→ bitte jeder zu Hause ausprobieren)!
→ siehe Skriptum

Falls: zu großer Auslenkungswinkel
→ schlechtere Werte für g

Falls: kleiner Auslenkungswinkel
→ super Werte für g
→ kleine Winkelnäherung gut!

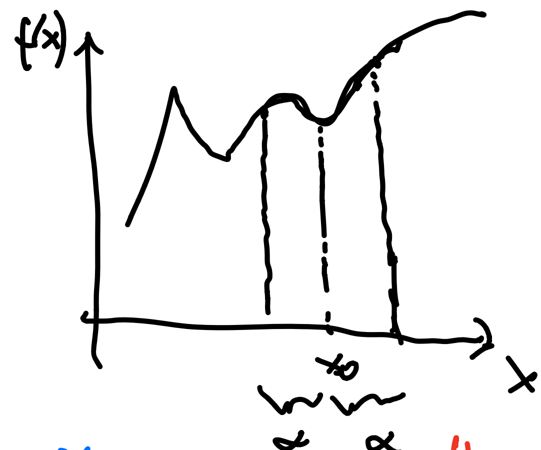
Woher kommt diese Näherung eigentlich,
was steckt (mathematisch) dahinter?

Die Taylor'sche Reihe

Otto, 4.3.1

Eine Funktion f sei in $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, $\alpha > 0$

$(n+1)$-mal differenzierbar.



Dann gilt für

$x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^{\nu} + R_n(x),$$

wobei $R_n(x)$ das Lagrange'sche Restglied

der Taylorentwicklung ist und gegeben

ist durch:

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$\vartheta \in (0,1)$

Falls gilt: $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, dann wird

die Funktion f durch die

Taylor'sche Reihe dargestellt:

$$\boxed{f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^{\nu}}$$

Den Fall $x_0 = 0$ nennt man auch

"Mac Laurin'sche Reihe".