Energieinhalt einer harmonischen Schwingung

Potentielle Energie: $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

einsetzen: $x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t$

$\dot{x}(t) = -x_0 \omega \sin\omega t + v_0 \cos\omega t$

Gesamtenergie:

$$E_{ges} = T + V = \frac{m}{2}\Big[x_0^2 \omega^2 \sin^2\omega t + v_0^2 \cos^2\omega t - 2 x_0 v_0 \omega \sin\omega t \cos\omega t\Big]$$

$$+ \frac{k}{2}\Big[x_0^2 \cos^2\omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2\omega t + 2 x_0 \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t \cos\omega t\Big]$$

$$= \frac{1}{2} x_0^2 \left(m\omega^2 \sin^2\omega t + k \cos^2\omega t\right)$$

$$+ \frac{1}{2} v_0^2 \left(m \cos^2\omega t + \frac{k}{\omega^2} \sin^2\omega t\right)$$

$$+ x_0 v_0 \sin\omega t \cos\omega t \left(-m\omega + \frac{k}{\omega}\right)$$

$k = m\omega^2$

$$\underbrace{}_{=0}$$

$$\underset{\frown}{\omega^2 = \frac{k}{m}} \quad \frac{1}{2} x_0^2 k + \frac{1}{2} v_0^2 m = \frac{1}{2} k \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ Gesamtenergie ist erhalten!

Was ist die maximale Amplitude der Schwingung?

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\vdots$$

$$= \underbrace{A \cos(\omega t + \delta)}$$

$\rightarrow$ einfachste Lösung: $x(t)$ formal umwandeln

$\Rightarrow$ bitte selber im Skript nachvollziehen und nachrechnen!

$$\vdots$$

$\vdots$ $\boxed{\text{Skript}}$

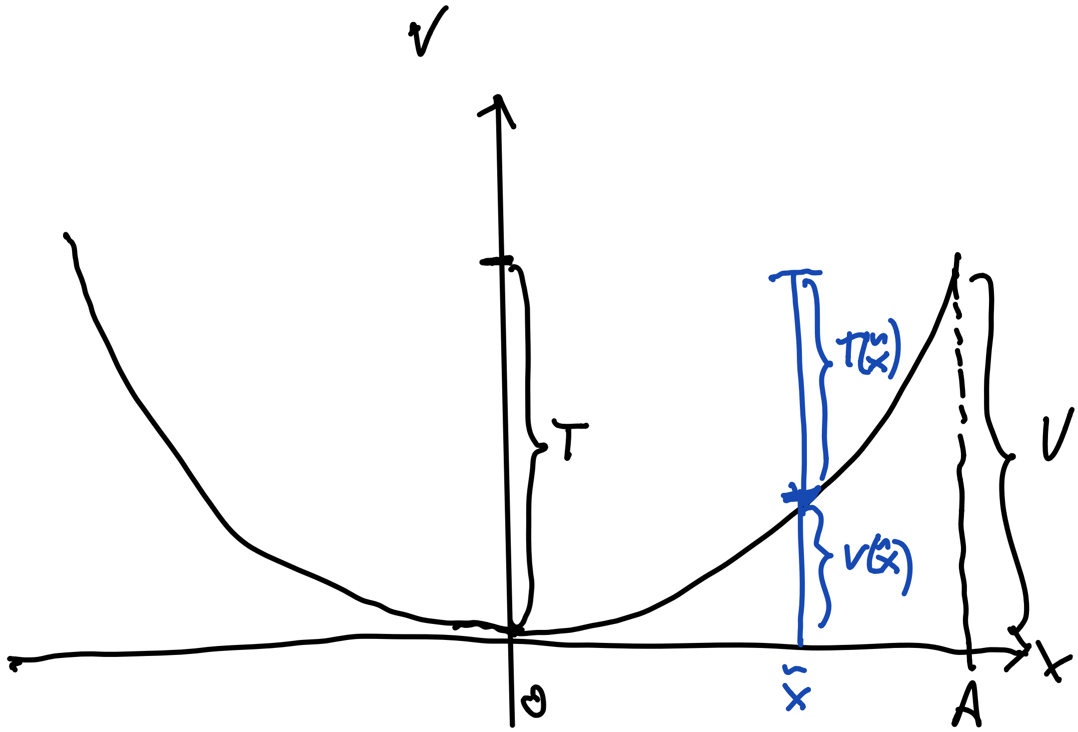
$\rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ mit

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

maximale Amplitude der Schwingung!

$$\Rightarrow E_{ges} = \frac{1}{2} k \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{k}{2} A^2$$

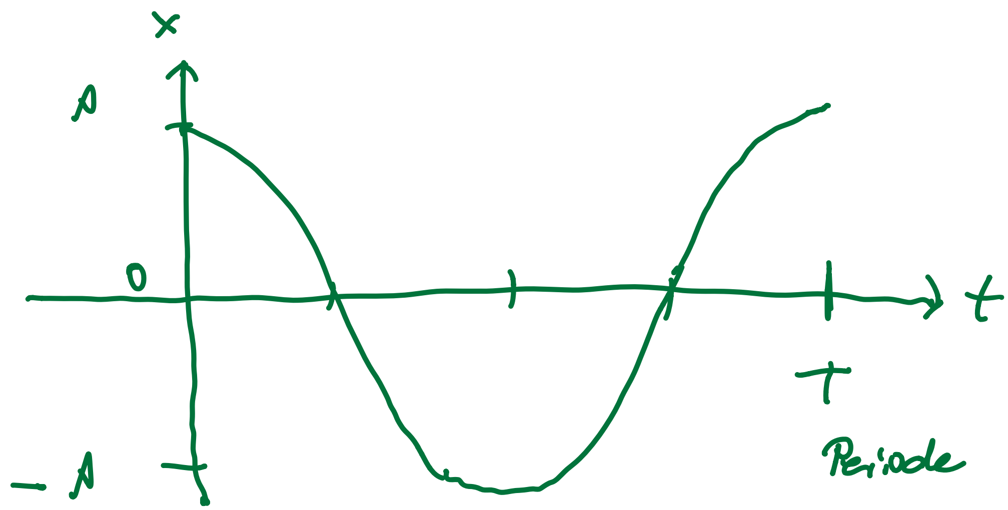
<u>Merke:</u> Die Gesamtenergie bei einer einfachen harmonischen Schwingung ist proportional zum Quadrat der maximalen Amplitude und ist erhalten!



$\Rightarrow$ V, T ändern sich zeitlich, die Summe ist konstant!

$\Rightarrow$ Was bedeutet das für $x(t)$, $V(t)$, $T(t)$ konkret?

$\Rightarrow$ Mittelwerte berechnen

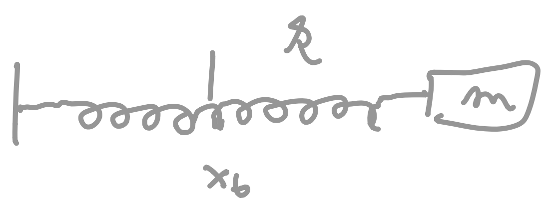


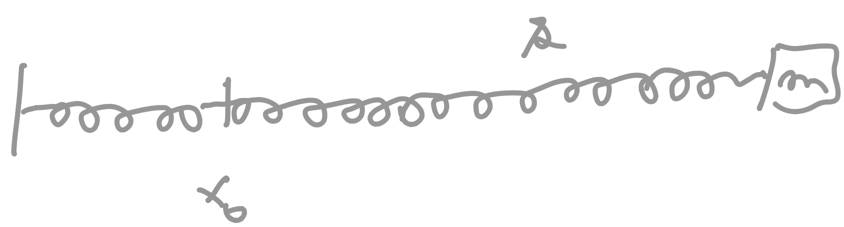
$\omega = 2\pi f$

$f = \frac{1}{T}$

Sowohl $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ als auch T sind bestimmt durch k, m, d.h. nur durch Eigenschaften des Systems.

$t = 0$:

a) 

b) 

unterschiedl. Ampl.

Schwingungen mit gleicher Frequenz ω, d.h. f und T, sind unabhängig von der Amplitude ("Auslenkung")!

Musik: Amplitude $\hat{=}$ Lautstärke!

Zurück zur Berechnung von Mittelwerten

$$x_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, x(t) = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A\cos\omega t$$

$$= \frac{A}{T\omega}\left[\sin\omega t\right]_0^T =$$

$$= \frac{A}{T\omega}\left[\underbrace{\sin(\omega T)}_{=0} - \sin 0\right] = 0$$

Potentielle Energie:

$$V_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t)$$

$$= \frac{1}{T} \frac{k A^2}{2} \int_0^T dt \, \frac{1}{2} \left(1 + \cos(2\omega t)\right)$$

$$= \frac{k A^2}{4T} \left[t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T$$

$$= \frac{k A^2}{4} = \frac{E_{ges}}{2}$$

Kinetische Energie:

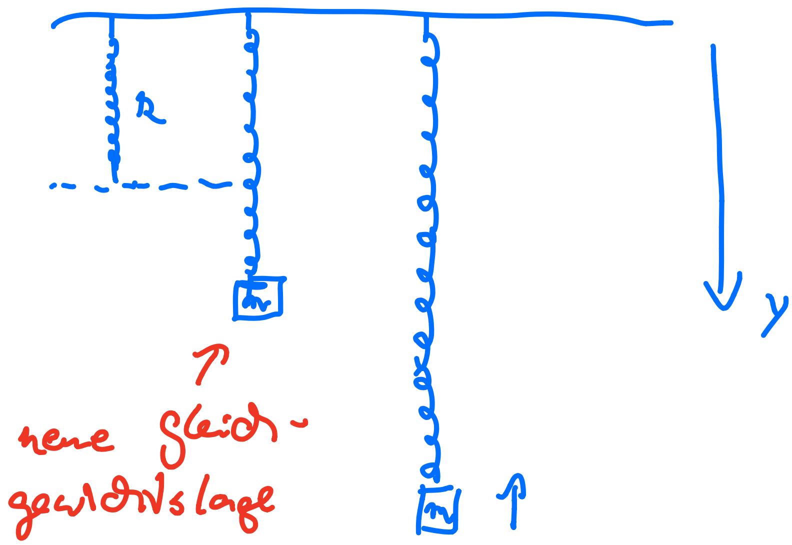
$$T_{av} = \frac{1}{T} \frac{m}{2} \int_0^T dt \, \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \frac{1}{T} \int_0^T dt \, \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$$

$$= \frac{1}{T} \frac{m \omega^2 A^2}{2} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \frac{m \omega^2 A^2}{2} \left[\frac{T}{2} \right] = \frac{m \omega^2 A^2}{4} = \frac{k A^2}{4} = \frac{E_{ges}}{2} \checkmark$$

Vertikale Feder im Gravitationsfeld

Masse an vertikaler Feder



Welche Kräfte wirken?

a) Federkraft $\vec{F}_{Hook} = -ky$ (wirkt nach oben)

b) Gewichtskraft $\vec{F}_g$ Kraft zieht nach unten

Bewegungsgleichung: Die Summe der Kräfte dem 2. Newton'schen Gesetz gleichsetzen.

$$m a_y = m\ddot{y} = \sum_i F_i = \vec{F}_{Hook} + \vec{F}_g = -ky + mg$$

$\Rightarrow$ Bgl.: $m\ddot{y}(t) = -k\,y(t) + mg$

Donnerstag