1.5 Grundlagen Vektorrechnung

Basisvektoren:

Vektoren der Länge eins, z.B. $\vec{e}_r$, heißen Einheitsvektoren:

$$|\vec{e}_r| = 1 \quad , \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

NB:

$$\vec{s} \rightarrow \vec{e}_s = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$$

kanonische Basisvektoren in einem KO-System

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0) \qquad \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \qquad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

In welche Richtung zeigen die Komponenten?

$\rightarrow$ hängt vom Koordinaten-System ab!

z.B.
- In kartesischen Ko-System: x, y, z - Richtung
- In Kugelkoordinaten: r, θ, φ - Richtung
- In Zylinderkoordinaten: ρ, φ, z - Richtung

Vektorzerlegung in Basisvektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar λ:

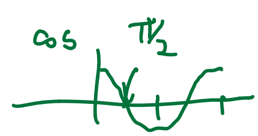
$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \lambda a_i \vec{e}_i = \lambda \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$$

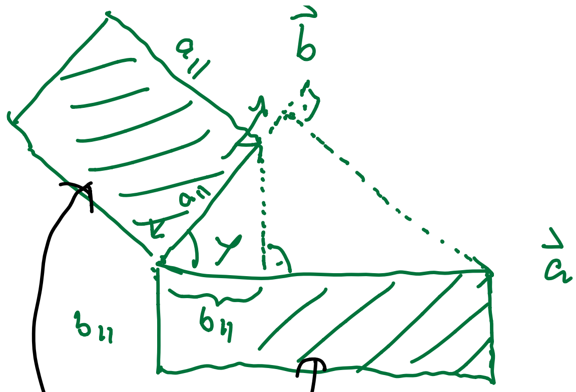
3 Fälle:

- Verlängerung des Vektors: $\lambda > 1$
- Stauchung: $\lambda < 1$
- Richtungsänderung: $\lambda < 0$

Skalarprodukt = „skalares" Produkt zweier Vektoren!

$$\left\| \; \vec{a} \cdot \vec{b} := a\, b_{\parallel} = a\, b \cos\varphi = b\, a_{\parallel} = \vec{b}\, \vec{a} \quad \text{„Zahl"} \; \right\|$$

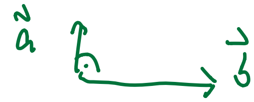




gleiche Fläche

$$\rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec a \vec b}{a b}$$

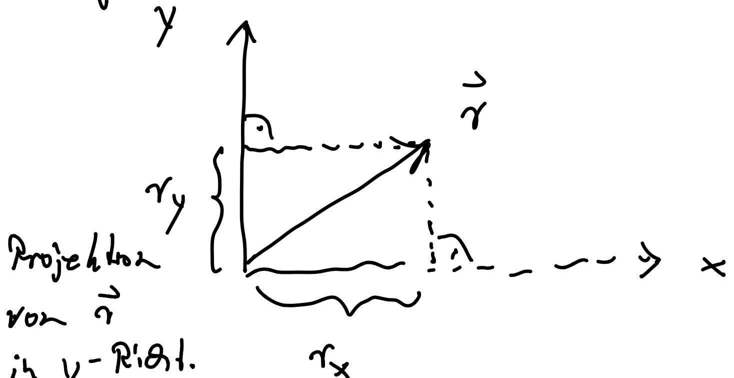
Winkel zwischen zwei Vektoren!



Orthogonalität:

$\vec a \perp \vec b \iff \vec a \cdot \vec b = 0 \Rightarrow$ wichtig für die Konstruktion von senkrechten Vektoren!

Projektion:



Projektion des Vektors $\vec r$ in x-Richtung

Skalarprodukt → Konstruktion orthogonaler Vektoren

Vektorprodukt: „Vektor"!

Vektorprodukt → Konstruktion eines Vektors, der senkrecht auf einer Ebene ist

= „vektorielles" Produkt von zwei Vektoren

$\Downarrow$

d.h. ein Vektor!

Def.: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$!

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a\, b \sin\varphi = a\, b_\perp = a_\perp b$$

Rechenregeln:

- $(\lambda \vec{a}) \times (\varkappa \vec{b}) = \lambda \varkappa (\vec{a} \times \vec{b})$ „Linearität"
- $\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \pm (\vec{a} \times \vec{c})$ „distributiv"

- In Komponenten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{e}_2$$
$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$$

NR: Determinante = "Zahl" einer Matrix

einer 2x2 Matrix: $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} u & v \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ x & z \end{vmatrix} = uz - vx$

= "Zahl"

einer 3x3 Matrix:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz: entwickeln nach erster Zeile

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_x \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - e_y \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+ e_z \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= e_x \left(\overset{(+1)}{a_2 b_3} - \overset{-1}{b_2 a_3} \right) - e_y \left(a_1 b_3 - a_3 b_1 \right)$$

$$+ e_z \left(a_1 b_2 - a_2 b_1 \right)$$

andere Möglichkeit:

- Komponentenschreibweise mit Levi-Civita-Tensor

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad \text{mit}$$

Levi-Civita Symbol ε_{ijk} , $i,j,k = 1,2,3$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i,j,k \text{ zyklisch} \\ 0 & \text{falls mind. zwei Indizes gleich} \\ -1 & i,j,k \text{ antizyklisch} \end{cases}$$