

$$m \ddot{x} + kx = 0$$

Ansatz: aus physikal. Anschauung motiviert

→ cosinus

sind es immer Schwingung? No!

gibt es Ansatz, der immer klappt?

→ Ja, Exp. Ansatz!

$$\parallel m \ddot{x} + kx = 0$$

Def. 2. Ord. $\parallel$

I. Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

(Nicht vergessen! 2 Konstanten nötig
→ später)

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

II: Ansatz einsetzen

$$m \cancel{\lambda^2 e^{\lambda t}} + \cancel{k e^{\lambda t}} = 0$$

$$\parallel m \lambda^2 + k = 0$$

$\parallel$ charakteristisches
Polynom

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\text{Frequenz } \omega} \quad \begin{array}{l} \text{"Eigenfrequenz} \\ \text{des Systems"} \end{array}$$

$\uparrow$ Schwingung $\uparrow$ 2 Lösungen
quadrat. Gleichung

Allg. Lösung ist Linear kombination:

$$x(t) = c_1 e^{+i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Benutze: Euler'sche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$x(t) = C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 (\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t))$$


$$= (C_1 + C_2) \cos \omega t + i (C_1 - C_2) \sin \omega t$$


III. Anfangsbedingungen einsetzen, d.h. Konstanten bestimmen

z.B. $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$

Wahrs: $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ Aufpassen!

$\Rightarrow$ Gleichungssystem lautet:

$$x(t=0) = C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} x_0 \rightarrow C_1 = x_0 - C_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t=0) &= \left[-(C_1 + C_2) \omega \sin \omega t + i (C_1 - C_2) \omega \cos \omega t \right] \Big|_{t=0} \\ &= i (C_1 - C_2) \omega \stackrel{!}{=} v_0 \end{aligned}$$

d.h. $i(x_0 - 2c_2)\omega = v_0$

$$-2ic_2\omega = v_0 - ix_0\omega$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{v_0 - ix_0\omega}{-2i\omega} = \frac{v_0}{-2i\omega} + \frac{x_0}{2}$$

$$= \frac{v_0}{2\omega} i + \frac{x_0}{2}$$

$$\Rightarrow c_1 = x_0 - c_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega} i$$

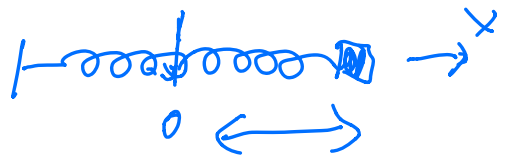
d.h. die Lösung lautet:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + i \left(-\frac{v_0}{\omega} i \right) \sin \omega t$$

$$\| x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad \|$$

Diese Lösung ist rein reell!

$\Rightarrow$ muß so sein!

Diskussion der Lösung: 

a) Falls m am Beginn an Position

$x_0 = 0$ und in Ruhe $v_0 = 0$

$\Rightarrow x(t) = 0$ passiert nichts!

b) Falls m am Beginn an Position $x_0 = 0$ ist,

aber sich in Bewegung, $v_0 \neq 0$, befindet

$$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

am Ort $x(t = \frac{\pi}{2\omega})$ zur Zeit $t = \frac{\pi}{2\omega}$

erreicht die Schwingung die maximale Auslenkung $\frac{v_0}{\omega}$.

Wie groß ist die Geschwindigkeit dort?

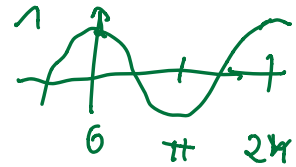
$$\dot{x}(t) = \frac{v_0}{\omega} \cancel{\omega} \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(t = \frac{\pi}{2\omega}) = v_0 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \checkmark$$

⇒ Körper ist in Ruhe, ist im Umkehrpunkt!

g) Falls man am Beginn an Position $x(t=0) = x_{\max}$,
aber in Ruhe: $v_0 = 0$

$$x(t) = x_{\max} \cos(\omega t)$$



⇒ Am Ort $x(t = \frac{2\pi}{\omega}, 0)$ hat die
Schwingung ein Maximum $x_{\max}$ ✓

Merke:

- Exponentialansatz löst die Dgl.!
- Charakter. Polynom entscheidet über die Art der Lösung: Schwingung oder exp. Lösung
- Bestimmung der Konstanten mittels Anfangs- (Rand-) Bedingungen liefert die endgültige Lösung!

Energiegehalt einer harm. Schwingung

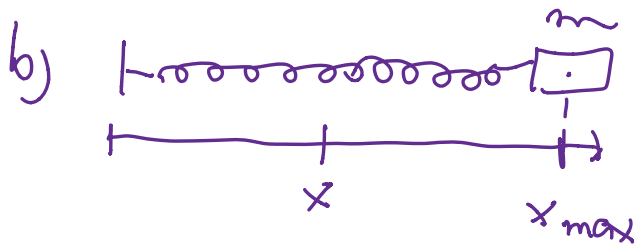


Gleichgewicht: m in Ruhe


$$\Rightarrow E_{kin} = E_{pot}$$

$$\rightarrow E_{kin} = ?$$

$$E_{pot} = ?$$



m in Ruhe

$$E_{kin} = 0$$

$$E_{pot} = \max$$

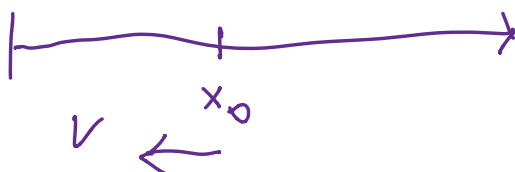
$$\rightarrow E_{kin} = ?$$

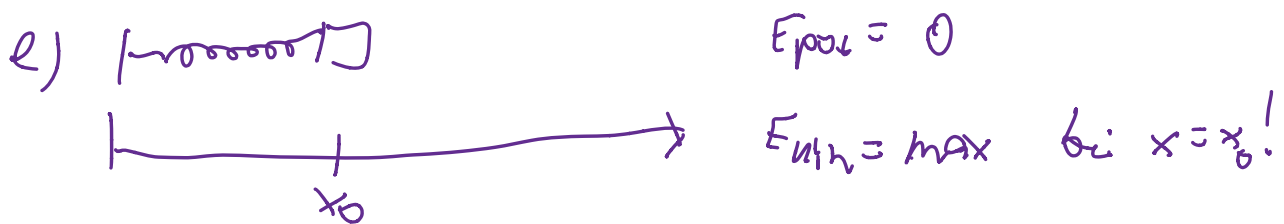
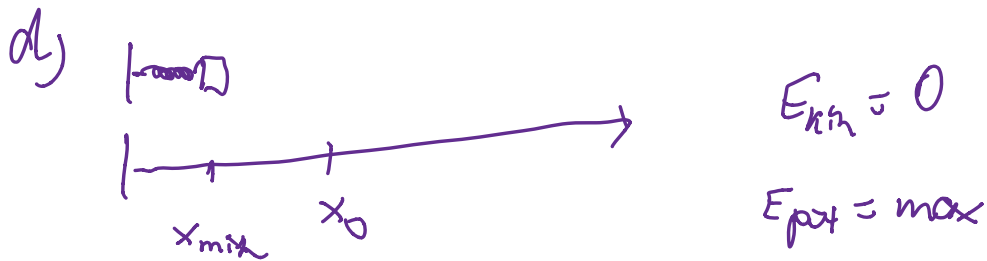
$$E_{pot} = ?$$



$$E_{pot} = 0$$

$$E_{kin} = \max$$





⇒ Schlussfolgerung?

⇒ Potentielle und kinetische Energie variieren mit der Zeit, aber die Summe ist konstant:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = T + V$$

Wie berechnen wir diese Energie?

Die einzig wirkende Kraft ist die

Federkraft, d.h. $\vec{F}_{\text{Feder}}$ ist konservativ:

$$\vec{F}_{\text{Hook}} = - \vec{\nabla} V = - \frac{dV(x)}{dx} \quad \text{Dgl. 1. Ordnung!}$$

→ Lösung mittels Variablentrennung:

$$dV(x) = - \vec{F}_{\text{Hook}} d\vec{x} \quad | \int$$

$$\int dV(x) = - \int \vec{F}_{\text{Hook}} d\vec{x} = - \int (-kx) dx = k \int_0^x x dx$$

$$V(x) - V_0 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + V_0$$

Wähle: $V(x=0) = 0$

$$\rightarrow V(x=0) = 0 + V_0 \rightarrow V_0 = 0$$

d.h. $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$ Potentielle Energie

Fehl noch die kinetische Energie!

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow T \text{ berechnen}$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad \Rightarrow V \text{ berechnen}$$

Gesamtenergie:

$$E_{\text{ges}} = T + V = \text{einsetzen ...}$$