

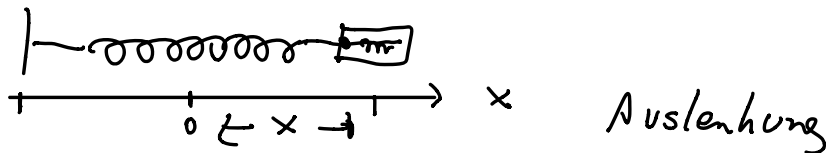
komplexe Zahlen: Otto, Kap. 8

Euler'sche Formel: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

Aber ab heute: Differentialgleichungen $\rightarrow$ Otto, Kap. 7
(Dgl.)

3. Schwingungen

3.1 harmon. Schwingungen



a) alle Kräfte: hier Federkraft

$$\vec{F} = F_x = - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Federhonsl.}}}{k} x$$

b) 2. Newton: $F_x = m a_x = m \ddot{x}$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung (Bgl.):

$$\left\| m \underset{\frac{d^2 x}{dt^2}}{\ddot{x}} = -kx \right\| \quad \text{Dgl. 2. Ordnung}$$

Ziel: $x(t)$ bestimmen ...???

Wie vorher?

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{d.h.} \quad v = \dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad | \int \quad \text{Dgl. 1. Ordnung}$$

Ges: $r(t)$

$$\int v dt = \int dr \quad | \int$$

$\Rightarrow$ "Trennung der Variablen" $\leftarrow r - r_0 \quad r_0 = r(t=0)$

Dieses Verfahren funktioniert nicht mehr, da wir
Dgl. 2. Ordnung nun lösen müssen!

$\Rightarrow$ Im Prinzip: immer $x(t)$ erraten!

Mathem. Verfahren für das "Raten":

1. Schritt: Ansatz machen und einsetzen

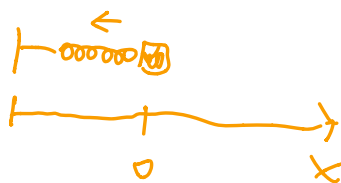
Vorüberlegung

$t = t_0$



loslassen

$t = t_1$



$t = t_2$



$t = t_3$



$\Rightarrow$ steht nach $\sin$ oder $\cos$ ans!

Ansatz:

$$\Rightarrow x(t) \sim \cos(\omega t)$$

$\uparrow$
Winkelgeschwindigkeit

Bei einer Dgl. 2. Ordnung müssen

2 Integrationskonstanten eingearbeitet werden

$\Rightarrow$ vollständiger Ansatz:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
Amplitude Phase

2. Schritt: Ansatz in Dgl. einsetzen

=> probieren, unter welchen Bedingungen, der Ansatz die Dgl. lösen kann!

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (*)$$

Ansatz: $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

$$\dot{x}(t) = -A \omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

in (*)

$$-m A \omega^2 \cos(\omega t + \delta) + k A \cos(\omega t + \delta) = 0$$

$$-m \omega^2 + k = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wichtig: ω hängt nur von

den Eigenschaften des Systems

ab, d.h. von k (Federkonst.)

und von m (Masse des schwingenden Körpers)!

Welches $\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$ ist das Richtige?

→ beide !!

Die allgemeine Lösung setzt sich aus einer Linearkombination beider Lösungen zusammen

$$x = \underline{A_1} \cos(\underline{\omega_1 t} + \underline{\delta_1}) + \underline{A_2} \cos(\underline{\omega_2 t} + \underline{\delta_2})$$

4 Konstanten? → no
es bleiben

2 üble

$$\omega_2 = -\omega_1 \Rightarrow A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(-\omega_1 t + \delta_2)$$

$$= \dots \text{Additionstheoreme} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \underbrace{(A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2)}_{C_1} \cos \omega_1 t + \underbrace{(A_2 \sin \delta_2 - A_1 \sin \delta_1)}_{C_2} \sin \omega_1 t$$

$$x(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t, \quad \omega_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

→ 2 Konstanten C_1 und C_2 !

3. Schritt: Konstanten bestimmen!

Wie? $\rightarrow$ mittels Anfangsbedingungen)
siehe früher $\vec{r}(t=0) = \vec{r}(0) = \vec{r}_0$

Wir brauchen nun zwei Anfangsbedingungen!

a) $x(t=0) = x_0$ und

b) $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$

$\Rightarrow$ Mit a) und b) die zwei Konstanten
 C_1 und C_2 bestimmen

$\Rightarrow$ Dgl. vollständig gelöst!

Wichtig: Zur vollständigen Lösung einer
Dgl. sind die Anfangs(Rand-)
bedingungen erforderlich!

Zusammenfassung:

Folgende Schritte lösen eine Dgl.:

I. Vollst. Ansatz aufstellen

II. Ansatz in Dgl. einsetzen

→ "erlaubten Frequenzen" erhalten

III. Mit Anfangs (Rand-)bedingungen
die Konstanten bestimmen:

Dgl. 1. Ordn. : 1 Konstante (d.h. 1 Be-
dingung)

Dgl. 2. Ordn. : 2 Konstanten (d.h. 2 Be-
dingungen)

Merke! Die Anfangs- (Rand-) Bedingungen
entscheiden, ob es Lösungen gibt!

• Sind die Lösungen von solchen Dgl. 2. Ord-
nung immer Schwingungen?

→ Nein!

• Gibt es ein allgemeines Rezept, welchen
Ansatz man wählt?

→ Ja! Immer den Exponentialansatz
wählen, der Rest ergibt sich.

$$\Rightarrow \text{Nochmal: } m \ddot{x} + kx = 0$$

$$\text{I. Ansatz: } x(t) = e^{\lambda t}$$

(konstante später hinzufügen, wir brauchen 2, $\downarrow$
nicht vergessen!)

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\text{II. } m \cancel{\lambda^2 e^{\lambda t}} + k \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$\parallel m \lambda^2 + k = 0 \parallel$$

Charakteristisches Polynom!



→ Fortsetzung am Donnerstag