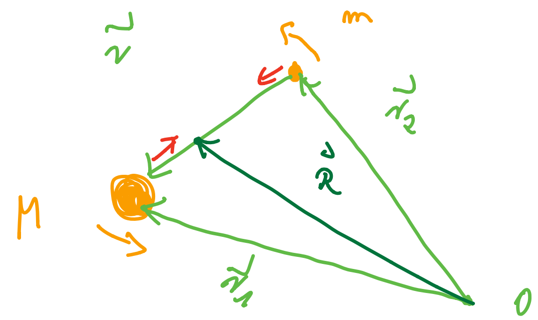
Weitere Literatur: Kuypers, Klass. Mechanik
(→ in Theo 1, super Literatur)

Zwei-Körper-System: Kepler Bewegung




Es gilt: a) Energieerhaltung (da konservative Kraft)

b) Drehimpulserhaltung (da Zentralkraft)

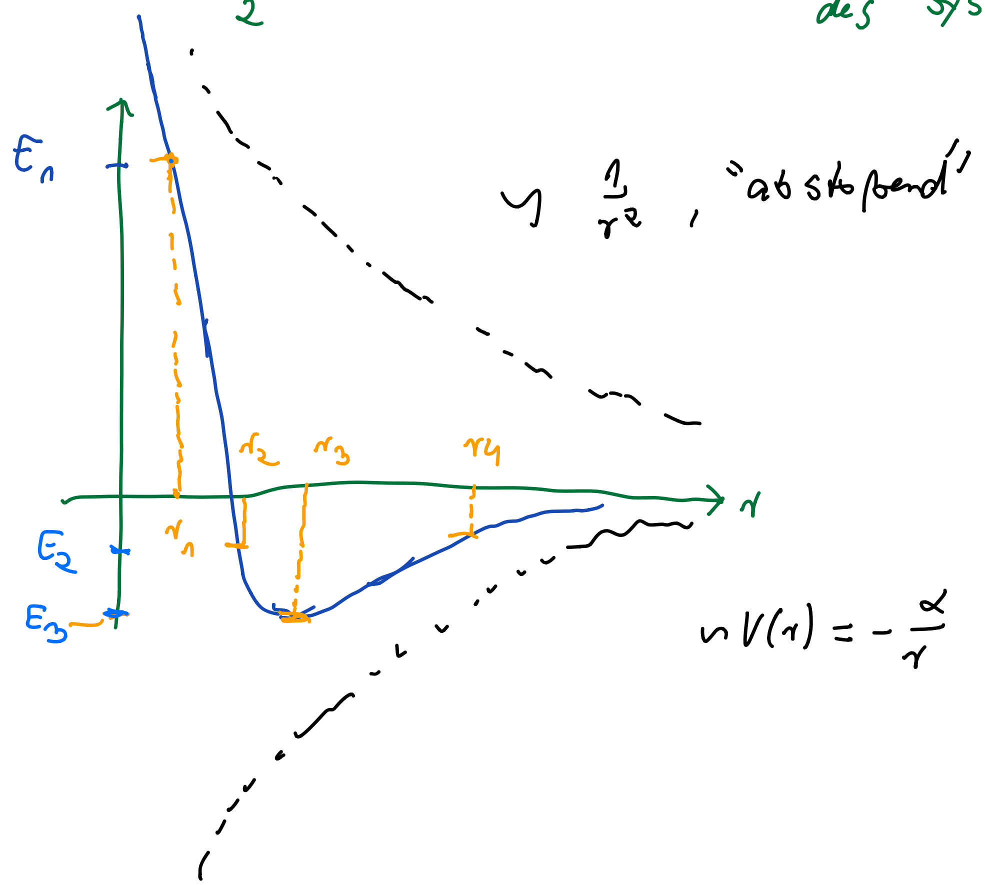
→ ebene Bewegung

wegen Drehimpulserhaltung gilt $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}$ bekannt!

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}_{\text{Zentrifugal pot}} + \underbrace{V(r)}_{\text{Grav. pot.}}}_{U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \text{ effekt. Pot.}} = \text{const}$$

Bewegung der red. Masse $\mu$ im eff. Pot. $U$:

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu \dot{r}^2(t)}{2} = E - U(r)$$ → radiale Bewegung des Systems




a) $E = E_1 > 0$! Für die gesamte Bew. $r \geq r_1$

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U(r)\right)}$$

$\dot{r}(r_1) = 0$ : kehrt um, ins $\infty$ → infinite Bahn

b) $E_3 < E \leq E_2$: Bahn läuft zwischen den zwei Umkehrpunkten $r_2$ und $r_4$ hin und her.
Ist eine finite Bewegung, aber noch unklar, ob offen oder geschlossen
→ häufig "Ellipsen"

c) $E = E_3$: $E = E_3 = -\mu \frac{\alpha^2}{2} L^2$ kinetische Energie der Radialbewegung verschwindet;
Bahn bildet Kreis mit $r_3 = \text{const} = \frac{L^2}{\alpha\mu}$

⇒ "geschlossene" Bewegung

NR:

$$U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \qquad \frac{\partial U}{\partial r} = -\cancel{2}\frac{L^2}{\cancel{2}\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2} \overset{!}{=} 0$$

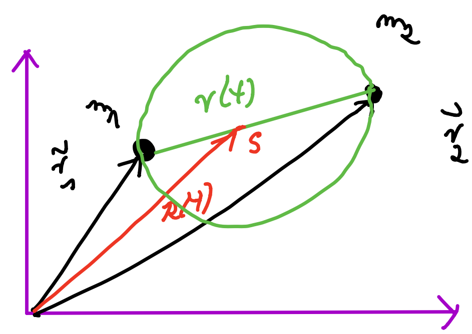
$$\Rightarrow r = \frac{L^2}{\alpha\mu} = r_3$$

$$U\left(\frac{L^2}{\alpha\mu}\right) = \frac{L^2}{2\mu}\frac{\alpha^2\mu^2}{L^4} - \frac{\alpha\alpha\mu}{L^2} = -\frac{\alpha^2\mu}{2L^2}$$

## Beispiele :

a) Sonne – Planet ($\mu \approx$ kleinere Masse) ; Planet kreist entweder ellipsenförmig oder fast kreisförmig um die Sonne

b) Doppelsterne ($\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$) ; radiale Bewegung der Sterne bewegt sich ellipsenförmig (kreisförmig) um den Schwerpunkt der Sterne




## Zusammenfassung

- Bewegung solcher Zwei – Körper Systeme kann immer in Bewegung des Schwerpunktes

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

und des Relativvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ zerlegt werden.

- Ohne äußere Kräfte führt der Schwerpunkt $\vec{R}$ eine gleichförmige Bewegung (d.h. $\ddot{\vec{R}}=0$) durch.
- Die Relativbewegung zweier Massen $m_1$ und $m_2$ entspricht der Bewegung einer reduzierten Masse $\mu$ $\hat{=}$ äquivalent zum Einteilchensystem!
- Bei Zentralkräften gilt Drehimpulserhaltung und die Bewegung findet in einer Ebene statt.

Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}$$

Integration:

$$dr = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}\, dt$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}}\, dr \qquad \Big| \int$$

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \ldots\, dr$$

$$\Rightarrow \; t(r)$$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion liefert $r(t)$

Fehlt noch die Bahnkurve $r(\varphi)$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi(t) = \frac{L}{\mu r^2}$$

$$d\varphi = \frac{L}{\mu r^2(t)} dt = \frac{L}{\mu r^2(t)} \frac{dt}{dr} dr \qquad \text{Trick!}$$

$$d\varphi = \frac{L}{\mu r^2(t)} \frac{1}{\dot r} dr \qquad \Big| \int$$

Setze $\dot r$ ein und danach beide Seiten integrieren:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{L}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}}$$

$$= \pm \int_{r_0}^{r} \frac{L}{\sqrt{2\mu}\, r^2} \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}} \Rightarrow \varphi(r) \text{ bestimmen}$$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion liefert $r = r(\varphi)$

D.h. die Bahnkurve ist vollständig bestimmt, falls Integrationskonstanten $r_0, \varphi_0$ und $E, L$ bekannt.

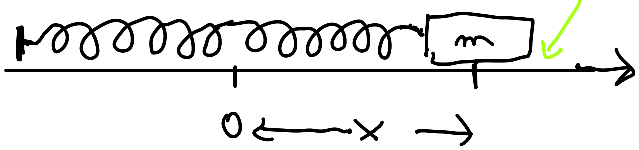
# 3. Schwingungen

## 3.1 Einfache harmonische Schwingungen

Schwingungen entstehen, wenn ein System aus dem Gleichgewicht ausgelenkt (d.h. gestört) wird.

### Horizontale Federn:

keine Reibung!




x Auslenkung

a) Alle wirkenden Kräfte auflisten: hier nur Federkraft ≙ "Hooke'sches Gesetz"

$$\vec{F} = F_x = -kx$$

↑ Federkonstante

Eigenschaft der Feder

b) Bewegungsgleichung mit Hilfe des 2. Newton'schen Gesetzes herleiten:

$$F_x = m a_x = m \dot{v}_x = m \ddot{x}$$

D.h. $\boxed{m \ddot{x} = -k x}$ Differentialgleichung (Dgl.) 2. Ordnung

Ziel: $x(t)$ bestimmen!