Zwei-Körper Problem mit Zentralkräften

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}_S}_{\text{Schwerpunktsdrehimpuls}} + \underbrace{\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}}_{\text{Relativ-drehimpuls}}$$

Reduzierte: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Im Schwerpunktsystem: $\vec{R} = \vec{0}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}_{rec} = \text{const.}$$

wähle $\vec{L} \parallel z$-Richtung:

$\Rightarrow$ $\vec{r}, \vec{p}, \dot{\vec{r}}$ liegen in xy-Ebene, d.h. die Bahnkurve liegt in xy-Ebene.

$\Rightarrow$ d.h. Drehimpulserhaltung ($\vec{L} = \text{const.}$) resultiert in einer ebenen Bewegung

Wir wissen: Energieerhaltung + Drehimpulserhaltung

$\Rightarrow$ resultierende Bahnkurve / Bewegung ?

Wähle Polarkoordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$:

$$r_x(t) = r(t)\cos\varphi(t) \qquad \dot r_x(t) = \dot r(t)\cos\varphi(t) - r\dot\varphi\sin\varphi(t)$$

$$r_y(t) = r(t)\sin\varphi(t) \qquad \dot r_y(t) = \dot r(t)\sin\varphi(t) + r\dot\varphi\cos\varphi(t)$$

einsetzen in $|\vec L|$: da $|\vec L| = \text{const}$, wähle $|\vec L| = L_z$

$$|\vec L| = L_z = \mu(\vec r \times \dot{\vec r})_z = \mu(r_x \dot r_y - r_y \dot r_x)$$

$$= \mu\left[\cancel{r\cos\varphi\,\dot r\sin\varphi} + r^2\dot\varphi\cos^2\varphi - \cancel{r\sin\varphi\,\dot r\cos\varphi} + r^2\dot\varphi\sin^2\varphi\right]$$

$$= \mu r^2\dot\varphi\left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right] = \mu r^2(t)\,\dot\varphi(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\varphi(t) = \frac{|\vec L|}{\mu r^2(t)}}$$

Energieerhaltung anwenden:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = T + V = \text{const}$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{\vec r}^2 + V(r) = \text{const.}$$

$$= \frac{1}{2}\mu(\dot r_x^2 + \dot r_y^2) + V(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r)$$

Wegen Drehimpulserhaltung ist $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}$ bekannt:

$$\Rightarrow \quad E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu \dot{r}(t)^2}_{\text{kin. Energie der radialen Bewegung}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2(t)}}_{\text{Zentrifugal-potential}} + \underbrace{V(r)}_{\text{Wechselwirkungspotential, hier: Gravitationspotential}}}_{U(r)} = \text{const}$$

$$\boxed{U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)}$$

effektives Potential

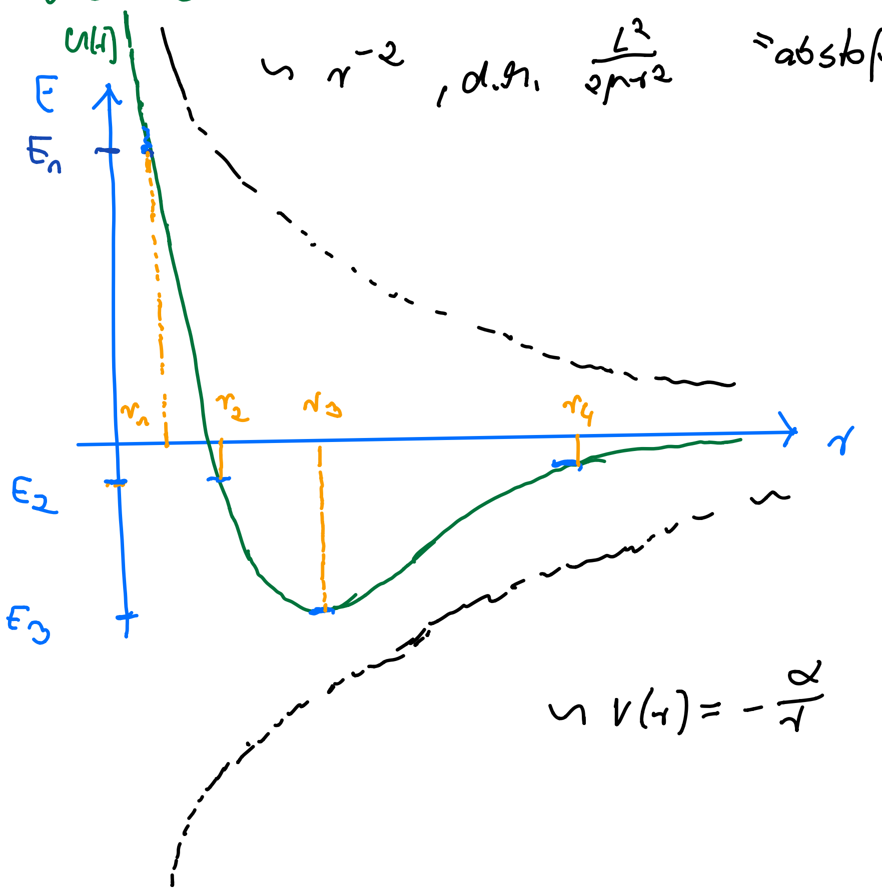
Bewegung der reduzierten Masse μ im effektiven Potential:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2(t) + U(r)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu \dot{r}^2(t)}{2} = E - U(r)$$

$\Rightarrow$ radiale Bewegung dieses Systems!

Wie sieht das Potential $U(r)$ aus?



r ist Relativkoordinate, d.h. der Abstand der Massen längs der Kraftwirkung!

Wie sieht die Bewegung für diese drei Energien E_1, E_2 und E_3 aus?

a) $E = E_1 > 0$: Für die gesamte Bewegung gilt $r \geq r_1$

Körper läuft auf Kraftzentrum zu mit

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}$$

$\dot{r}(r_1) = 0$: kehrt um und läuft ins ∞

$\rightarrow$ infinite Bahn

b) $E_3 \le E \le E_2$:

c) $E = E_3$: