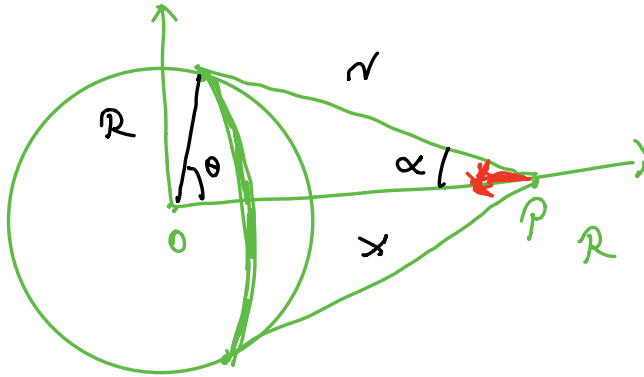


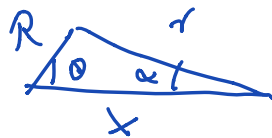
Gravitationsfelder: Hohlkugel



$$\left\| \quad dg_x = -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left(1 + \frac{x^2 - R^2}{r^2} \right) dr \quad \right\|$$

Fehltd noch: Integration von dr
Fallunterscheidung nötig

1. Fall: P liegt außerhalb der Hohlkugel
d.h. $x > R$:



$$r \in [\underbrace{x-R}_{\theta=0}, \underbrace{x+R}_{\theta=\pi}]$$

$$g_x = -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \int_{x-R}^{x+R} dr \left(1 + \frac{(x+R)(x-R)}{r^2} \right)$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left[r - \frac{(x-R)(x+R)}{r} \right]_{x-R}^{x+R}$$

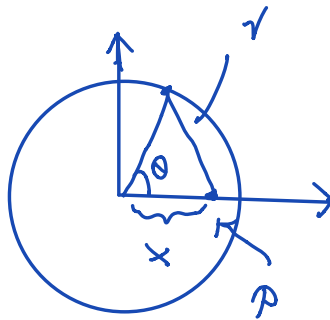
$$= -\gamma \frac{M}{4x^2} \underbrace{R \left[(x+R) - (x-R) - (x-R) + (x+R) \right]}_{4R}$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} 4R = -\gamma \frac{M}{x^2} \quad \text{für } x > R$$

2. Fall: P liegt innerhalb der Hohlkugel
d.h. $x < R$

$$r \in [R-x, R+x]$$

" $\theta=0$ " " $\theta=\pi$ "



$$g_x = -\gamma \frac{\eta}{4x^2 R} \int_{R-x}^{R+x} \left(1 + \frac{(x+R)(x-R)}{r^2} \right) dr$$

$$= -\gamma \frac{\eta}{4x^2 R} \left[r - \frac{(x+R)(x-R)}{r} \right]_{R-x}^{R+x}$$

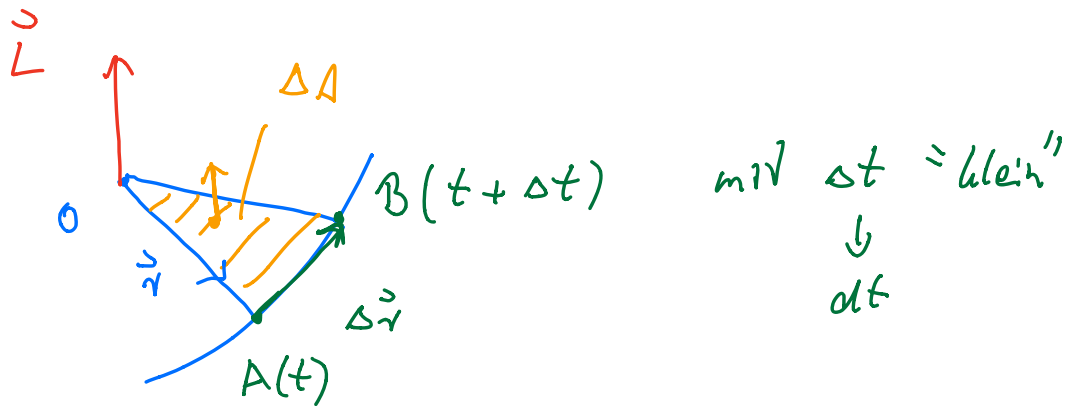
$$= -\gamma \frac{\eta}{4x^2 R} \left[(\cancel{R+x}) - (\cancel{R-x}) - (\cancel{x-R}) - (\cancel{x+R}) \right]$$

$$= -\gamma \frac{\eta}{4x^2 R} \cdot [0]$$

$$\Rightarrow g_x = 0 \quad \text{für } x < R$$

2.2 Das Kepler-Problem und Drehimpulserhaltung

2. Keplersches Gesetz: Ein von der Sonne zum Planeten überzogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.



Fläche OAB: $\Delta \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \Delta \vec{r}$
 $\Rightarrow d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$

Fläche pro Zeiteinheit:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{1}{2} \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{Geschwindigkeit}} \\ &= \frac{1}{2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \end{aligned}$$

Falls das Flächengesetz gültig ist:

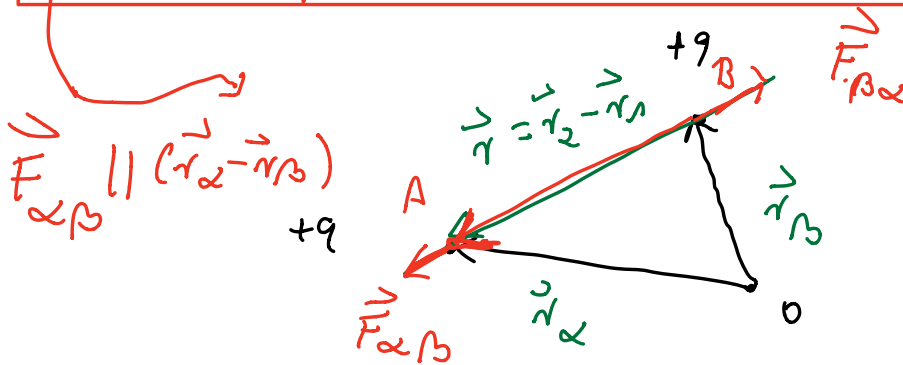
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \text{const.} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = \text{const.}$$

⇒ Drehimpuls des Teilchens:

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m (\vec{r} \times \vec{v}) = \text{const.}$$

Das Flächengesetz beinhaltet, daß der Drehimpuls erhalten ist!

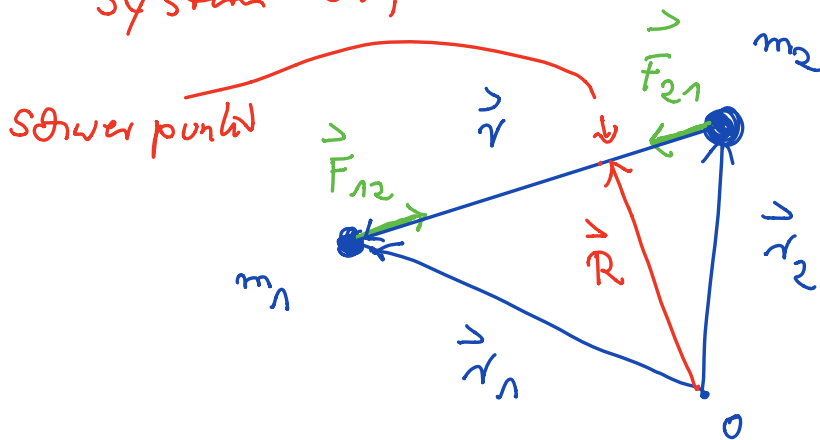
⇒ Allgemeiner Erhaltungssatz:
Wenn es sich bei den wirkenden Kräften um Zentralkräfte handelt, ist der Drehimpuls erhalten!



Zwei-Körper Problem mit Zentralkräften

Idee: Zwei-Körper System als ein System betrachten

⇒ System in Schwerpunkts- und Relativsystem aufteilen



Gesamtmasse einführen: $M = m_1 + m_2 = \sum_{i=1}^2 m_i$

Schwerpunktsystem:

$$\text{Ortsvektor } \vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad (*)$$

⇒ Schwerpunktsystem bei $\vec{R} = \vec{0}$

Gesamtimpuls : $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2$

Gesamt Drehimpuls : $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$

Gesamt Kraft : $\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$

$$\vec{F}_{12} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_{12}$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2$$

$\Rightarrow$ In Schwerpunktskoordinaten (*): $M \ddot{\vec{R}} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Relativkoordinaten einführen: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Wie bekommt man die Relativbewegung?

$$\begin{array}{lcl} \vec{F}_{12} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 & | \cdot m_2 & \\ \vec{F}_{21} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 & | \cdot m_1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{actio = reactio} \\ \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \end{array}$$

Differenz: $m_2 \vec{F}_{12} - m_1 \vec{F}_{21} = m_2 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2)$

$$(m_1 + m_2) \vec{F}_{12} = m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}$$

$$\mu \vec{F}_{12} = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{F}_{12} = \left(\frac{m_1 m_2}{\mu} \right) \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}$$

reduzierte Masse $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Spezialfälle: $m_1 = m_2 = m \Rightarrow \mu = \frac{m}{2}$

$m_1 \ll m_2 \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)}$

$$\text{Taylor} = \frac{m_1 m_2}{m_2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^{-1}$$

$$\approx \frac{m_1 m_2}{m_2} \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right)$$

$$\approx m_1$$

sch klein

Drehimpuls:

$$\| \vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}_S}_{\text{Schwerpunkts-}} + \underbrace{\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}}_{\text{Drehimpuls der Relativbewegung}} \|$$