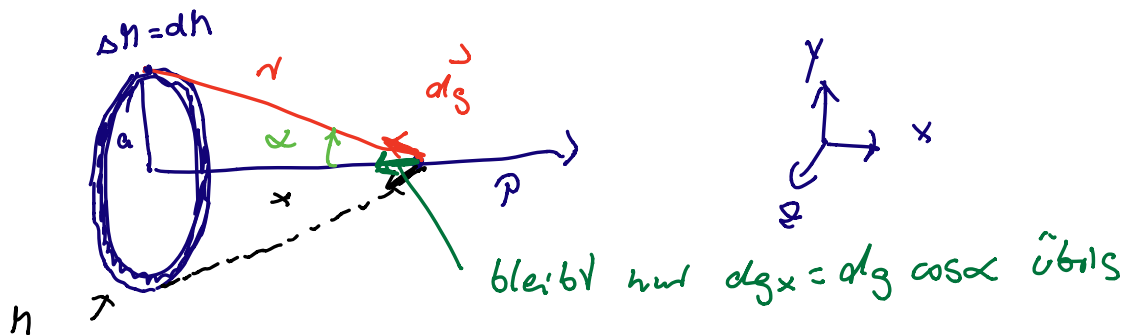


2. Gravitationsfeld eines massiven Ringes

Frage: Wie ist das Gravitationsfeld eines massiven Ringes der Masse M entlang einer senkrechten Achse durch den Mittelpunkt?



- Wähle dm aus und integriere entlang des Rings

→ Symmetrie: nur Komponenten längs der x -Achse bleiben übrig!

$$\Rightarrow dg = -\gamma \frac{dm}{r^2}$$

↓
wegen Symmetrie: $dg_x = dg \cos \alpha = -\gamma \frac{dm}{r^2} \cos \alpha$

- Integration: $g_{\text{total}} = g_x = -\int dm \gamma \frac{\cos \alpha}{r^2}$
- dm parametrisieren: da jedoch r und α für alle Punkte des Rings gleich sind!

$$\Rightarrow S_{\text{tot}} = S_x = -\gamma \frac{\cos \alpha}{r^2} \int_0^h dr = -\gamma \frac{\cos \alpha}{r^2} h, \text{ wobei:}$$

$$h = \int_b^h dr$$

$$\text{h.V. } r^2 = a^2 + x^2:$$

$$\Rightarrow \left\| S_x = -\gamma \frac{\cos \alpha h}{a^2 + x^2} \right\|$$

Test: In weiter Entfernung, d.h. $x \gg a$ gilt:

$$S_x = -\gamma \frac{\cos \alpha h}{a^2 + x^2} \stackrel{x \gg a}{=} -\gamma \frac{\cos \alpha h}{x^2} \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{a}{x}\right)^2 + 1}}_{\left(\left(\frac{a}{x}\right)^2 + 1\right)^{-1}}$$

Taylor-Entwicklung:

$$\frac{1}{1+y} = (1+y)^{-1} \approx 1-y, \text{ für } y \ll 1$$

(ableiten oder Formelsammlung)

bei uns: $y = \frac{a}{x}$ ist kleiner 1!

$\Rightarrow$ D.h. Taylor-Entwicklung anwendbar!

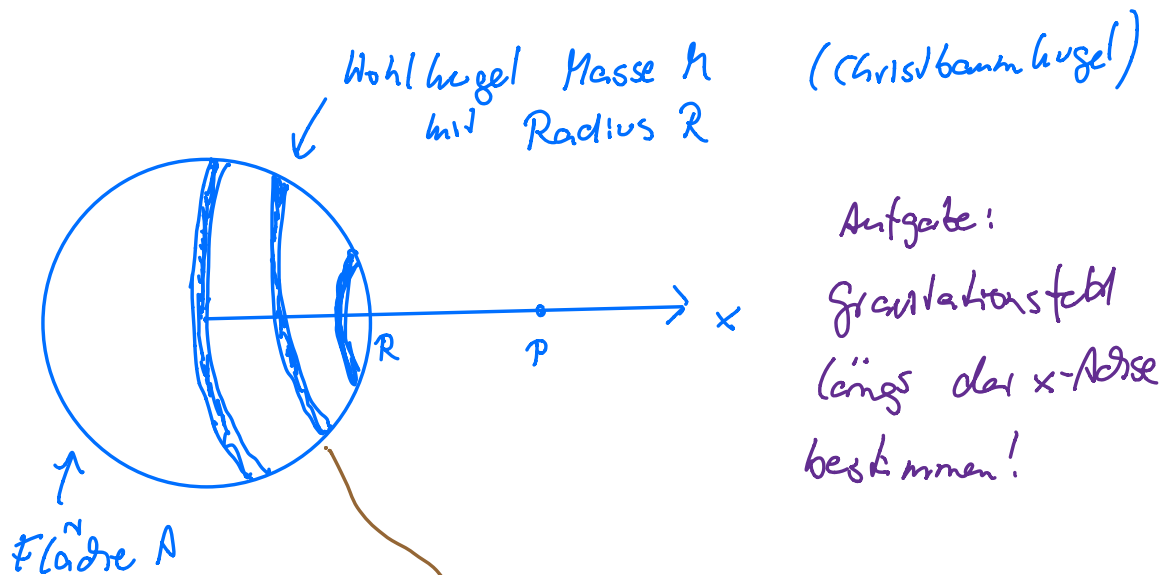
$$\Rightarrow g_x = -\gamma \frac{\cos \alpha h}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} \approx -\gamma \frac{\cos \alpha h}{x^2} \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2\right)$$

da sehr klein,
→ Weg lassen

$$\approx -\gamma \frac{\cos \alpha h}{x^2}$$

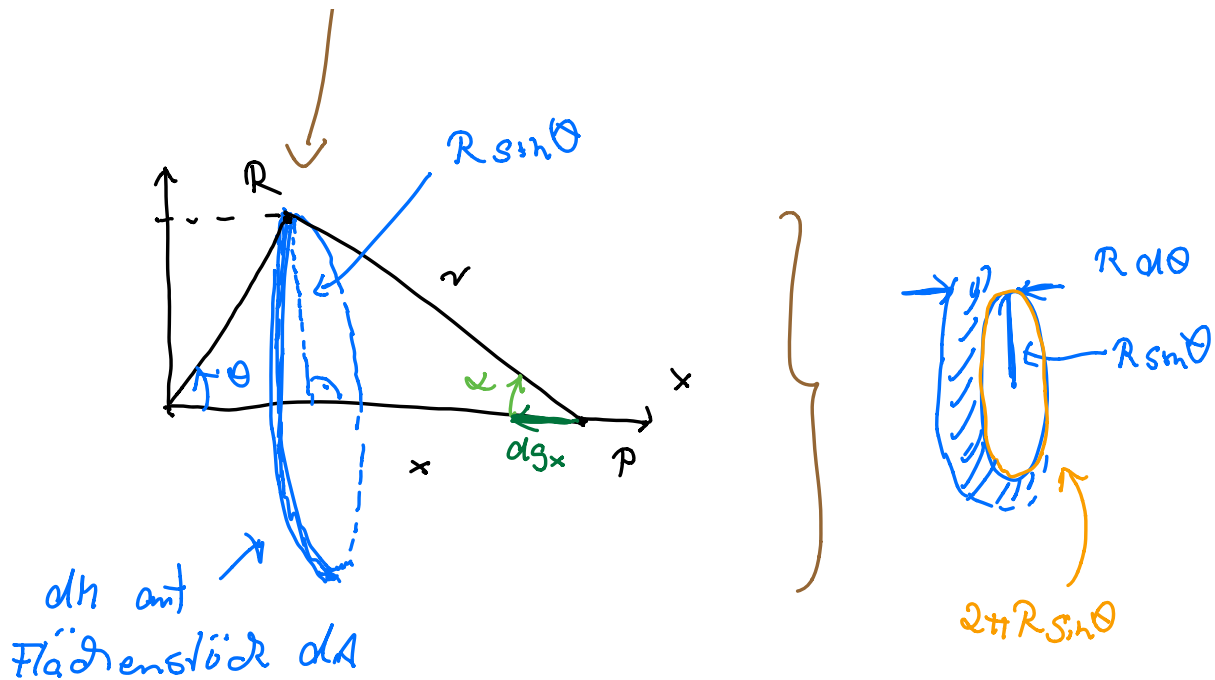
Feld des Ringes sieht im weit entfernten wie
ein Punkt der Masse M aus ✓ passt

3. Gravitationsfeld einer Hohlkugel



Idee: Setze Hohlkugel aus Streifen von Ringen zusammen!

z.B.



⇒ Plan: Gravitationsfelder der Hohlkugel direkt aus vorherigem Beispiel übernehmen!

- Wegen der Symmetrie bleibt wieder nur das Feld in x-Richtung übrig:

$$dg_x = -\gamma \frac{dm}{r^2}$$

Bsp. 2

- Parametrisierung von dm:
gesamte Kugelschale hat die Masse M gleichmäßig verteilt auf die Fläche $A = 4\pi R^2$

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{A} &= \frac{dM}{dA} \quad \rightarrow dM = \frac{M}{A} dA = \frac{M}{4\pi R^2} dA \\
 &= \frac{M}{4\pi R^2} \underbrace{(2\pi R \sin\theta) R d\theta}_{\text{arc length}} \\
 &= \frac{1}{2} M \sin\theta d\theta
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ einsetzen in g_x :

$$dg_x = -\gamma \frac{\cos\alpha}{r^2} \frac{M}{2} \sin\theta d\theta \quad (*)$$

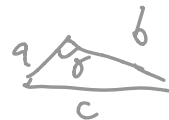
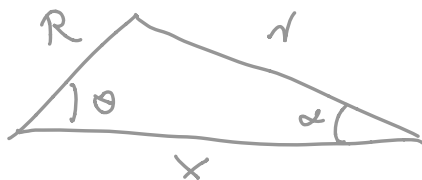
fehlt noch: Abhängigkeit α, r bestimmen

$\rightarrow r, \alpha$ und θ hängen hier voneinander ab

Ziel: Drücke α (oder $\cos\alpha$) als Funktion von r und θ ausdrücken

$\rightarrow$ Kosinussatz benutzen!

Einschub: Kosinussatz



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\Rightarrow \parallel r^2 = R^2 + x^2 - 2xR \cos \theta \parallel$$

Wie verändert sich r mit θ ? (kettenregel)

linke Seite ableiten nach dr : $2r dr$

rechte Seite ableiten nach $d\theta$: $2xR \sin \theta d\theta$

$$\text{l.S.} = \text{r.S.} : \cancel{2} r dr = \cancel{2} x R \sin \theta d\theta$$

$$\frac{r}{xR} dr = \sin \theta d\theta$$

in (*) einsetzen:

$$dg_x = -\gamma \frac{\cos \alpha}{r^{\cancel{2}}} \frac{M}{2} \frac{\cancel{r}}{xR} dr$$

$$= -\gamma \frac{M}{2} \frac{1}{xR} \frac{\cos \alpha}{r} dr \quad (**)$$

$\Rightarrow$ Nun besteht noch die Abhängigkeit zwischen α und r

$\Rightarrow$ Nächster Schritt: $\cos \alpha$ ersetzen

Normal Kosinussatz anwenden:

$$R^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \alpha$$

$$\text{d.h.} \quad \cos \alpha = \frac{r^2 + x^2 - R^2}{2rx}$$

einsetzen in (*):

$$ds_x = -\gamma \frac{1}{2} \frac{1}{xR} \frac{r^2 + x^2 - R^2}{2r^2} dr$$

$$= -\gamma \frac{1}{4x^2 R} \frac{r^2 + x^2 - R^2}{r^2} dr$$

$$= -\gamma \frac{1}{4x^2 R} \left(1 + \frac{x^2 - R^2}{r^2} \right) dr$$

⇒ FHN noch Integration über dr !