$$\vec{\nabla}(\phi\,\psi) = \vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{\phi}\,\psi) + \vec{\nabla}(\phi\,\overset{\downarrow}{\psi})$$

alles, was direkt abgeleitet werden soll, muss direkt rechts neben Nabla stehen!

$$= \psi\,\vec{\nabla}\,\overset{\downarrow}{\phi} + \phi\,\vec{\nabla}\,\overset{\downarrow}{\psi}$$

$$= \psi(\vec{\nabla}\phi) + \phi(\vec{\nabla}\psi)$$

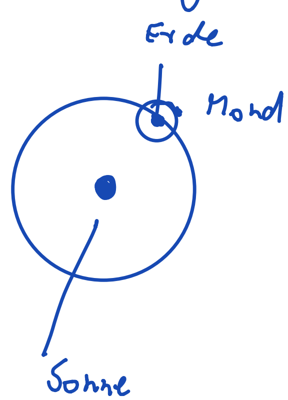
$\vec{\nabla}$ ist normaler Vektor!

ε-Tensor gern bei 7. ausprobieren:

$$(\vec{a}\times\vec{b})_i = \vec{c}_i = \varepsilon_{ijk}\,a_j\,b_k =$$

$$= b_k\,\varepsilon_{ijk}\,a_j$$

Gravitationsgesetz: $F_G \sim \frac{1}{r^2}$



Wir machen Test:

- der Mond erfährt eine Zentripetalbeschleunigung.
- wie groß ist diese verglichen mit der Erd-beschleunigung?
- vergleichen sie die zugehörigen Bahnradien

→ wie verhalten sich die Beschleunigungen zu den Bahnradien

$$g = 9.81 \ m\, s^{-2}$$

$$\frac{2\pi R_M}{T_M}$$

$$\vec{F}_{M,Z} = m_M \vec{a}_M$$

$$a_M = \frac{F_{Z,M}}{m_M} = \frac{\cancel{m_M}\, v_M^2}{R_M\, \cancel{m_M}} = \frac{v_M^2}{R_M} = \frac{4\pi^2 R_M}{T_M^2}$$

$R_M = 3.84 \cdot 10^8 \ m$ (mittlere Bahnradius)

$T_M = 27$ Tage $\hat{=}\ 2.34 \cdot 10^6 \ s$

→ $a_M = 2.72 \cdot 10^{-3} \ m s^{-2}$

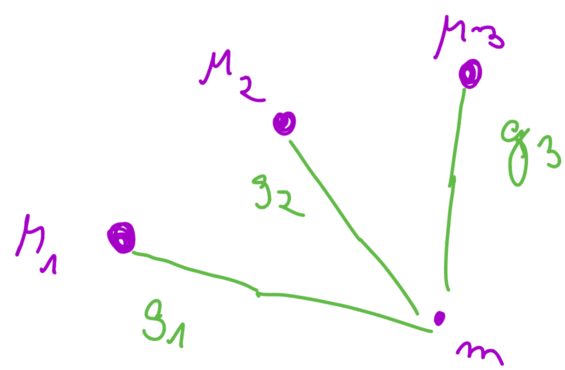
$$\frac{g}{a_m} = 3604 = (60)^2$$

Vergleichen mit zugehörigem Bahnradius:

$$\left(\frac{R_M}{R_E}\right)^2 = \left(\frac{3.84\cdot 10^8\,m}{6.37\cdot 10^6\,m}\right)^2 \simeq (60)^2$$

$\Rightarrow$ Beschleunigungen ↔ umgekehrt proportional zu den Abständen der Punkte vom Erdmittelpunkt.

Übergang zu Mehrteilchensystem



→ gesamtes Gravitationsfeld, das auf m wirkt:

$$\vec{g}_{total} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \dots = \sum_i \vec{g}_i = \int d\vec{g}_i$$

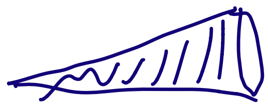
→ gesamtes Gravitationspotential:

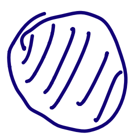
$$\phi_{total} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots$$

Wie berechnet man das Gravitationsfeld von ausgedehnten Körpern?

Tipler 11.4

z.B.  • massiver Stab

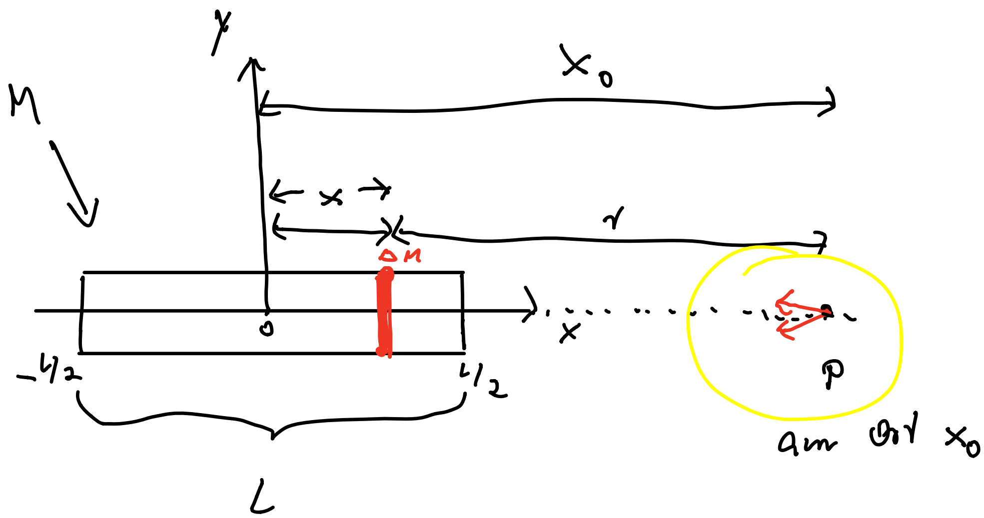
 massiver Zylinder

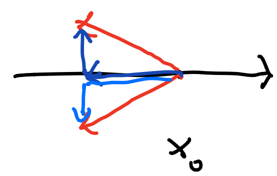
 massive Kugel

$\Rightarrow$ Wie summiert man die Massenstückchen auf?

1. Gravitationsfeld eines massiven Stabes

Frage: Wie lautet das Gravitationsfeld entlang der x-Achse für einen massiven Stab, der in x-Richtung orientiert ist mit der Masse M und der Länge L.





$$dg_x = -\gamma \frac{dm}{r^2} \qquad \vec{g} = -\gamma \frac{m}{r^2}$$

Strategie:

- Skizze + Symmetrie ausnützen
- Wähle $\underset{\overset{\shortparallel}{dm}}{\Delta m}$ aus $\underset{\overset{\shortparallel}{dx}}{\Delta x}$ und integriere von $\int_{-L/2}^{+L/2}$
- Am Punkt P (an der Stelle x_0) das Feld $d\vec{g}$ – von dm erzeugt – ausrechnen:

$\Rightarrow$ bleibt nur x-Komponente übrig also $dg_x = -\gamma \frac{dm}{r^2}$

wie rechnet man das aus?

- dm parametrisieren: homogene Verteilung

$$\frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \qquad \boxed{\frac{M}{L} \hat{=} \text{"Massendichte"}} \; !$$

- $r = x_0 - x$

$$= -\gamma \frac{M}{L} \frac{dx}{r^2} =$$

$$\Rightarrow dg_x = -\gamma \frac{dm}{r^2} = \underbrace{-\gamma \frac{M}{L} \frac{dx}{(x_0 - x)^2}}_{} \quad \Big| \int$$

- Integral: $\int_{-L/2}^{L/2}$ $\rightarrow$ symmetrisch!

$$\Rightarrow g = g_x = \int_{-L/2}^{L/2} dg_x = -\gamma \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} =$$

$$= -\gamma \frac{M}{L} \left[\frac{1}{x_0 - x} \right]_{-L/2}^{L/2} =$$

$$= -\gamma \frac{M}{L} \left[\frac{1}{x_0 - L/2} - \frac{1}{x_0 + L/2} \right] = -\gamma \frac{M}{\cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{x_0^2 - (L/2)^2}$$

$$\Rightarrow g = g_x = -\gamma M \frac{1}{x_0^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Da x_0 beliebig:

$$\vec{g} = -\gamma M \frac{1}{x^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \vec{e}_x$$

Test: Im weit entfernten Gebiet, sieht der Stab wie ein Punkt aus

$\rightarrow \; x \gg \frac{L}{2}$

$$\Rightarrow \quad \vec{g} = -\gamma M \frac{1}{x^2} \vec{e}_x$$

✓ passt