2. Zwei-Körper-Probleme mit Zentralkräfte

2.1 Gravitation und Kepler Gesetze

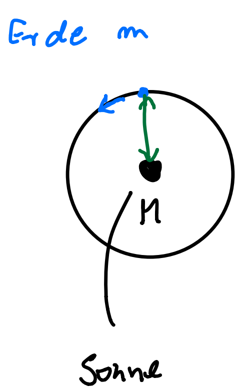
Joh. Kepler 1571 - 1630

Start: 1. Kepler'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. In einem ihrer Brennpunkte steht die Sonne.

Spezialfall einer Ellipse ist ein Kreis:

Brennpunkt = Mittelpunkt



Kraft $\vec{F}$ weist auf Mittelpunkt

Körper m führt eine "Kreisbewegung" aus:

Zentripetalkraft!

$$|\vec{F}_z| = m\frac{v^2}{R}$$

Notiz: eigentlich reduzierte dass $\mu = \frac{mM}{m+M}$ nehmen!

Aber da gilt:

$$\mu\Big|_{m \ll M} \simeq \frac{m\cancel{M}}{\cancel{M}} \simeq m$$

Da $v = \frac{2\pi R}{T}$, T = Periodendauer

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{F}_z| = m\frac{4\pi^2 R^{\cancel{2}}}{T^2 \cancel{R}} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}}$$

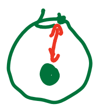
3. Kepler'sches Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben (= dritten Potenzen) der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen

$T^2 \sim \bar{r}^3 \overset{\text{Kreis}}{=} R^3$, $\bar{r}$ = mittlerer Abstand

$$|\vec{F}| = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \sim m\frac{4\pi^2 R}{R^3} = m\frac{4\pi^2}{R^2} \sim \frac{1}{R^2}$$

d.h. die wirkende Kraft zwischen zwei Körpern

 — die Gravitationskraft — muss <u>zentral</u> wirken und $\sim \frac{1}{r^2}$ sein, um die Kepler'schen Gesetze zu erfüllen!

2. Kepler'sches Gesetz:

Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

Das Gravitationsgesetz von Newton (1687)

$$\vec{F}_G \sim \frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r$$

Annahme: Gravitationswechselwirkung ist eine allgemeine Eigenschaft der Materie.
Dann ist die Kraft $\vec{F}$ proportional zur Menge der Materie: $F \sim m\, M\, f(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_G = -\gamma M m \frac{1}{r^2} \vec{e}_r}$$

Gravitationsgesetz

mit der Konstante $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

Gravitationsfeld $\hat{=}$ das Feld, das auf die Masse m wirkt:

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}}$$

Bsp.: Gravitation der Erde $r > r_E$ beträgt:

$$\vec{g}(r) = -\gamma \frac{M_E}{r^2} \vec{e}_r$$

$\Rightarrow$ Richtung zum Erdmittelpunkt

<u>Gravitationspotential:</u>

Ist die Gravitationskraft konservativ?

$\rightarrow \sim \frac{1}{r^2}$ wie bei Coulombkraft

→ in Übungsaufgabe bewiesen

⇒ $\vec{F}_G$ ist ebenfalls konservativ

Dann muss es ein Potential V_G geben:

$$\vec{F}_G = -\vec{\nabla} V_G$$

Herleitung des Potentials:

$$\vec{F}_G(r) = -\vec{\nabla} V_G(r) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} V_G(r)$$

$$d\vec{r}\, \vec{F}_G(r) = -d V_G(r) \qquad \Big| \int$$

$$\int_{\infty}^{r} d\vec{r}\, \vec{F}_G(r) = \int_{V_G(\infty)}^{V_G(r)} -d V_G(r)$$

$$\int_{\infty}^{r} d\vec{r} \left(-\gamma \frac{mM}{r^2}\right) \vec{e}_r = -\int_{V_G(\infty)}^{V_G(r)} d V_G(r)$$

$$-\gamma m M \int dr\, \underbrace{\vec{e}_r \frac{1}{r^2} \vec{e}_r}_{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1} = -V_G(r) + \overbrace{V_G(\infty)}^{\stackrel{!}{=} 0}$$

↑ potentielle Energie

$$-\gamma m M \left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \gamma m M \frac{1}{r} = -V_G(r)$$

$$\Rightarrow \left\| \text{Potential:} \quad V_G(r) = -\gamma m M \frac{1}{r} \right\|$$

attraktives Potential

Das Gravitationspotential, das auf den Körper m wirkt, wird aus dem Gravitationsfeld $\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}$ abgleitet:

$$\left\| \phi_G = -\gamma \frac{M}{r} \right\|$$

Zusammenfassung

Gravitationskraft:

$$\vec{F}_g = -\gamma m M \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = m\vec{g}$$

= Kraft, die zwischen m und M wirkt!!

$$[F_g] = N = kg\, m/s^2$$

Gravitationsfeld:

$$\vec{g} = -\gamma M \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

γ = Grav. konst, $[\gamma] = N \frac{m^2}{kg^2}$

= Feld, das von M erzeugt und auf m wirkt!

Gravitationspotential:

$$\phi_g = -\gamma M \frac{1}{r}$$

„potentielle Energie pro Masseeinheit m"

$$[\phi_g] = J/kg = N\,m/kg$$

Übergang zu Mehrteilchensystemen