Der Nabla - Operator

⇒ definiert die Operatoren der Vektoranalysis

- Gradient $\vec{\nabla} f(\vec{r})$ → "macht aus Funktion einen Vektor"
- Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ → "macht aus Vektor eine Zahl"
- Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ → "macht aus Vektor einen Vektor"
- Laplace $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$ → "ergibt einen skalaren <u>Operator</u>"

$$\Rightarrow \Delta \phi(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \Delta \vec{A}(\vec{r})$$

Rechenregeln:

$$\vec{\nabla}(\phi \psi) = (\vec{\nabla}\phi)\psi + \phi(\vec{\nabla}\psi)$$

$$\vec{\nabla}(\phi \vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi)\vec{A} + \phi(\vec{\nabla}\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi)\times\vec{A} + \phi\,\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \text{rot grad }\phi = 0$$

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(\vec{\nabla}f)(\vec{\nabla}g) + f(\Delta g) \qquad (\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})$$

$\Rightarrow$ normale Vektoren kann man in verschiedenen Koordinatensystemen ausdrücken

Vorsicht!

Sieht der $\vec{\nabla}$-Operator in allen Koordinatensystemen gleich aus? No!

$\vec{r} = r(u_1, u_2, u_3)$ aber

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} f(\vec{r}) \neq \begin{pmatrix} \partial/\partial u_1 \\ \partial/\partial u_2 \\ \partial/\partial u_3 \end{pmatrix} f(\vec{r}) \quad !$$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla}$ muss mit Hilfe der Funktionaldeterminante in die anderen Koordinatensysteme umgerechnet werden! (siehe später)

- kart. KO: $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \underbrace{\partial_x}_{= \partial/\partial x} + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z$
- Polarko: $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \partial_\varphi$
- Zylindko: $\vec{\nabla} = \vec{e}_\varrho \partial_\varrho + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z$
- Kugelko: $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi$

1.9.4 Konservative Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \iff \vec{F} \text{ konservativ}$$

Welche Bedingung muss erfüllt sein?

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

Warum?

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla} V(\vec{r})\right) = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} V\right) = 0$$

immer!

Nebenrechnung! → siehe Hausaufgabe!

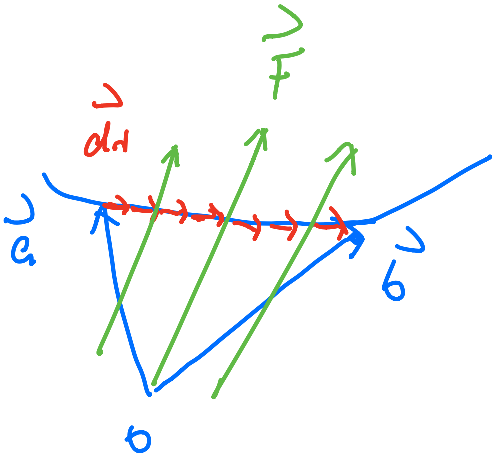
$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \dots \sum_{j,k} a_j b_k \dots$$ bitte spielen

Falls die Rotation eines Kraftfeldes verschwindet, dann ist es eine konservative Kraft!

⇒ d.h. die geleistete Arbeit von $\vec{F}(\vec{r})$ ist vom gewählten Weg unabhängig!

Was bedeutet das?

$$W = \int_{\vec a}^{\vec b} d\vec r \;\; \vec F(\vec r) = \int_{t(\vec a)}^{t(\vec b)} dt \; \frac{d\vec r}{dt} \; \vec F(\vec r(t)) = \int_{t(\vec a)}^{t(b)} dt \; \dot{\vec r} \, \vec F(\vec r(t))$$



Falls $\vec F$ konservativ : setze $\vec F = - \vec\nabla V(\vec r)$

$$W = \int_{t(\vec a)}^{t(\vec b)} dt \; \dot{\vec r} \, \vec F(\vec r) = - \int_{t(\vec a)}^{t(\vec b)} dt \; \dot{\vec r} \; \vec\nabla V(\vec r)$$

$$= - \int_{t(\vec a)}^{t(b)} \cancel{dt} \; \frac{d\cancel{\vec r}}{\cancel{dt}} \; \frac{d}{d\cancel{\vec r}} V(\vec r) = - \int dV(\vec r)$$

$$= - \; V(\vec r(t(\vec b))) + V(\vec r(t(\vec a))) \qquad (*)$$

Jetzt: Was passiert, wenn wir einen geschlossenen Weg C nehmen, d.h. $\oint_C$?

Aus (*) folgt sofort: $W = 0$!

Strategie: Falls $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \rightarrow$ konservativ $\rightarrow V$ bestimmen

Falls $\vec{F}$ nicht konservativ ist:

$$W = \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} dt\, \dot{\vec{r}}\, \vec{F}(\vec{r})$$

explizit berechnen und in geeignete Wegstücke unterteilen

Energieerhaltung

$$W = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} m \underbrace{\vec{a}}_{\ddot{\vec{r}}} \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} m\, \ddot{\vec{r}}\, \dot{\vec{r}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int d(\dot{r}^2) = E_{kin}(t(\vec{b})) - E_{kin}(t(\vec{a}))$$

(Subst.: $u = \frac{1}{2}\dot{r}^2 \rightarrow du = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dot{r}\ddot{r}\, dt$)

Nun! Annahme $\vec{F}$ sei konservativ

$$W = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} F\, d\vec{r} = - \int \vec{\nabla} V(\vec{r})\, d\vec{r} =$$

$$= - \int \frac{\partial}{\cancel{\partial \vec{r}}} V(\vec{r})\, \cancel{d\vec{r}} = - \int_{V(\vec{a})}^{V(\vec{b})} dV(\vec{r}) = - V(\vec{b}) + V(\vec{a})$$

$$= E_{pot}(\vec{a}) - E_{pot}(\vec{b})$$

Vergleich:

$$E_{kin}(t(\vec{b})) - E_{kin}(t(\vec{a})) = E_{pot}(\vec{a}) - E_{pot}(\vec{b})$$

$$\underbrace{E_{kin}(t(\vec{b})) + E_{pot}(\vec{b})}_{E_{ges}(\vec{b})} = \underbrace{E_{pot}(\vec{a}) + E_{kin}(t(\vec{a}))}_{E_{ges}(\vec{a})}$$

$\Rightarrow$ Für konservative Kräfte gilt Energieerhaltung!

Literatur: Otto, 12.2.4, 12.3.1