

Zu Aufgabe:

$$r(\varphi(t)) \rightarrow r(\varphi, t)$$

$\uparrow$

a)  $R, \omega$   
b)  $R, \varphi(t)$   
c)  $R(t), \varphi(t)$

Für konervative Kräfte gilt: die geleistete Arbeit ist vom gewählten Weg unabhängig!

Gibt es ein Kriterium für Kräfte mit der Eigenschaft "konservativ"?

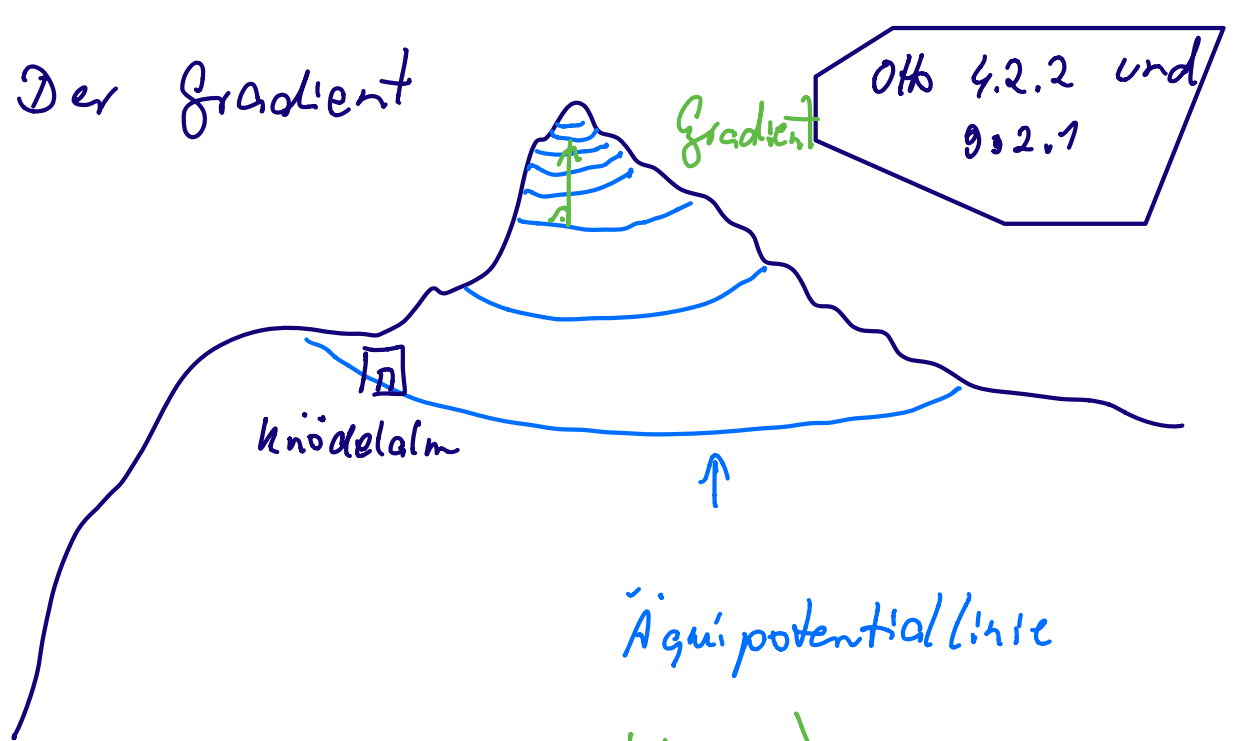
$\Rightarrow$  Ein Kraftfeld  $\vec{F}$  heißt "konservativ", wenn es ein Potential  $V$  gibt, so daß gilt:

$$\vec{F} = - \vec{\nabla} V$$

$\uparrow$   
Nabla-Operator  $\frac{\partial}{\partial x} = \nabla = \nabla_x$  (1 Dim)

$\Rightarrow$  Man bildet den "Gradienten" einer Funktion!

## 1.9.2 Der Gradient



$$\underbrace{\text{grad } f(x_1, \dots, x_n)}_{\hat{=} \vec{\nabla} f(x_1, \dots, x_n)} := \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}$$

Was ist das? ... Partielle Ableitungen!

Partielle Ableitungen: betrifft Funktionen mit mehreren Variablen

$$f(x_1, x_2): \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} := \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_2 = \text{const}} = f_{x_1}$$
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} := \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1 = \text{const}} = f_{x_2}$$

$$\text{Bsp.: } f(x, y) = x^2 + 5xy + y^3$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + 5y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 5x + 3y^2$$

## 2. partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) = f_{x_2 x_1}$$

Satz von Schwarz

$$\Downarrow \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) = f_{x_1 x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Big|_{x_2 = \text{const}}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1 = \text{const}}$$

Satz von Schwarz: "Reihenfolge der Ableitungen",  
 d.h. ob zuerst  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  und danach  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  oder  
 zuerst  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  und danach  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  gebildet wird,  
 spielt keine Rolle!

$\Rightarrow$  d.h. die gemischten 2. partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

müssen identisch sein!

Der Nabla-Operator:

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \end{pmatrix} f(x_1, \dots, x_n) =: \vec{\nabla} f(x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $\vec{\nabla}$  = "Nabla-Operator" (hier in links. VO)

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \end{pmatrix} = \vec{e}_{x_1} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_{x_2} \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \vec{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \vec{e}_{x_1} a_1 + \vec{e}_{x_2} a_2 + \dots + \vec{e}_{x_m} a_m$$

Was ist ein Operator?

Ein Operator wirkt immer auf eine Funktion,  
d.h. er kann nie allein stehen!

$$\left\| \vec{\nabla} f(\vec{r}) \right\|$$

Der  $\vec{\nabla}$ -Operator ist ein "linearer Differentialoperator":

→ kann man wie einen normalen Vektor behandeln

→ d.h. üblichen Rechenregeln der Vektoralgebra anwenden

Was bedeutet "normaler" Vektor?

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \end{pmatrix}$$

⌘ Komponenten des Gradientenvektors in die verschiedenen Richtungen

Es gilt:

- Die Richtung von  $\text{grad } f = \vec{\nabla} f$  ist immer senkrecht zu den Flächen  $f(\vec{x}) = \text{const}$  ( $\hat{=}$  Höhen-, Äquipotentiallinien)
- Die Größe des Gradientenvektors,  $|\vec{\nabla} f|$  gibt die Stärke der Veränderungen von  $f \perp$  zu den Höhenlinien an, d.h. ist ein Maß für die Dichte der Höhenlinien.

Rechenregeln:

- $\text{grad}(f_1 + f_2) = \vec{\nabla}(f_1 + f_2) = \vec{\nabla} f_1 + \vec{\nabla} f_2$
- $\text{grad}(f_1 \cdot f_2) = \vec{\nabla}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \vec{\nabla} f_2 + f_2 \vec{\nabla} f_1$

$\Rightarrow$  normale Produktregel!

Hilfreicher Rechentrick: das Nabla-Kalkül

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} (f_1 \cdot f_2) &= \vec{\nabla} \left( \overset{\downarrow}{f_1} \overset{\downarrow}{f_2} \right) + \vec{\nabla} \left( \overset{\downarrow}{f_1} \overset{\downarrow}{f_2} \right) \\ &= f_2 (\vec{\nabla} f_1) + f_1 (\vec{\nabla} f_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \left( \underset{\substack{\nearrow \\ \text{Skalar}}}{\phi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vektor}}}{\vec{v}} \right) &= \vec{\nabla} \times \left( \overset{\downarrow}{\phi} \overset{\downarrow}{\vec{v}} \right) + \vec{\nabla} \times \left( \overset{\downarrow}{\phi} \overset{\downarrow}{\vec{v}} \right) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{v} \overset{\downarrow}{\phi} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{v} \\ &= -\vec{v} \times (\vec{\nabla} \phi) + \phi (\vec{\nabla} \times \vec{v})\end{aligned}$$

Beispiele: Übungsblatt

### 1.9.3 Weitere Vektoroperatoren

a) Rotation:

$$\text{rot } \vec{A} = \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{Vektor}} \times \vec{A} = \overset{\substack{\nwarrow \\ \text{wieder Nabla}}}{\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{array} \right)}$$

Interpretation der Rotation:

- Das Ergebnis ist ein Vektor, der auf  $\vec{\nabla}$  und  $\vec{A}$  senkrecht steht
- beschreibt den "Wirbelcharakter" eines Feldes

b) Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{A} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{\text{Zahl!}} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

Interpretation:

- Das Ergebnis ist eine reine Zahl!
- beschreibt den "Quellencharakter" eines Feldes

c) Laplace - Operator

$$\Delta := \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{\text{"Zahl"}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\Rightarrow$  Da "Operator": wirkt immer auf eine Funktion!



Es gilt:

$$\underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{grad}} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \vec{A})}_{\text{div}} \neq \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{skal}} \underbrace{\vec{A}}_{\text{vektor}} = \Delta \vec{A} \quad ||$$

grad

div

skal

vektor

vektor

skal

vergleichbar

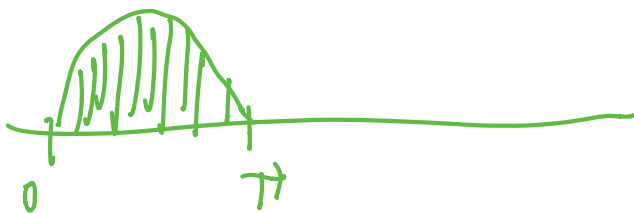
wie bei normalen

vektoren!

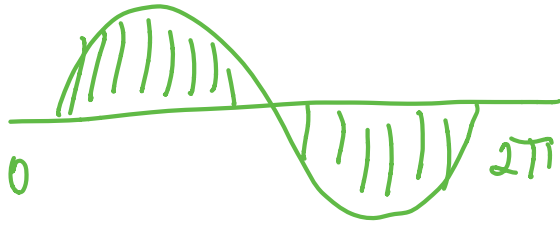
$$\vec{a} (\vec{a} \vec{b}) \neq (\vec{a} \vec{a}) \vec{b} !$$

Tip:

Streng an die Reihenfolge der  $\vec{\nabla}$ -Operatoren  
und an die Klammersetzung halten!



$$\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta$$

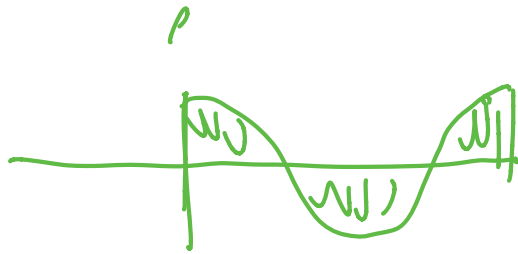


$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \neq 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta$$

$$\int_{-1}^1 d\cos \theta$$

$$= \int_{-1}^1 dx$$



$$\int_0^{2\pi} dp \dots = \left[ p \right]_0^{2\pi}$$

Raumwinkel:

$$\int_0^{2\pi} dp \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \dots =$$



$$\int_{-1}^1 d\cos \theta \stackrel{\text{Lambert}}{=} \int_{-1}^1 dx = \left[ x \right]_{-1}^1 = 2$$

$$\Rightarrow \iint dp \, d\theta \, \sin \theta = 4\pi$$