

Otto, Kap. 12

1.9 Konserervative Kräfte und Arbeit

1.9.1 Arbeit und Wegintegrale

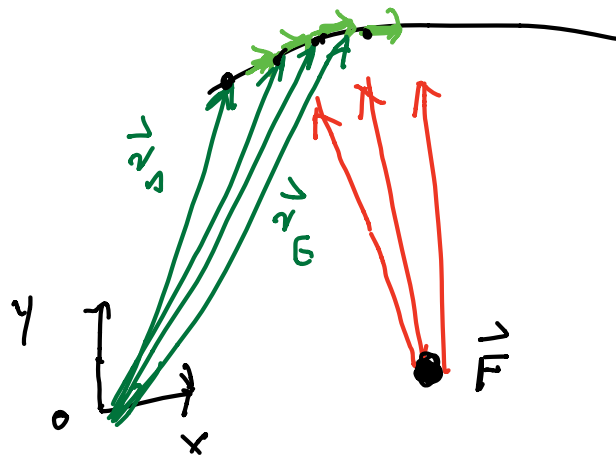
Arbeit = "Kraft mal Weg"

↑ ↑ ↑

Zahl Vektor • Vektor

$$W = \int_{\gamma_A}^{\gamma_E} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= "Wegintegral" !



Bestimme die wirkende Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ in jedem einzelnen $d\vec{r}$!

Wie kann die resultierende Bewegung beschrieben werden?

→ Bewegungsgleichung ermitteln!

Bewegungsgleichung = Gleichung, die die Bewegung komplett beschreibt und vorhersagt!

Sie ist gegeben durch: $\vec{F}_{\text{ges}} = m \vec{a} = m \ddot{\vec{r}}$

Berechnung der Arbeit!

$$W = \int_{r_a}^{r_e} \vec{F}_{\text{ges}} \cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_e} m \ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{falls } m \text{ konstant}}{=} m \int_{r_a}^{r_e} \ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r}$$

$$= m \int_{r_a}^{r_e} \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = m \int_{t_a}^{t_e} \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt$$

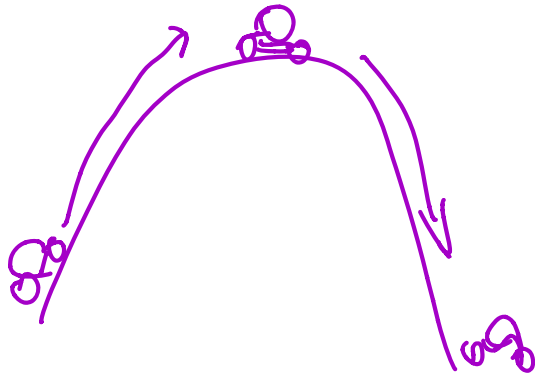
$$= m \int d\left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2\right) = \frac{m}{2} \int_{v(t_a)}^{v(t_e)} d(v^2)$$

Test: Substitution $u = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \Rightarrow du = \frac{1}{2} \cdot 2 \dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} dt$

$$= \frac{m}{2} [v^2(t_e) - v^2(t_a)] = E_{\text{kin}}(t_e) - E_{\text{kin}}(t_a)$$

$\Rightarrow$ Gesamtarbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energien $\frac{1}{2}mv^2$, die der Körper jeweils am Ort r_e und r_a besitzt.

Poten-tielle Energie:



Gesamtarbeit

$$\sum \vec{F}_{\text{ges}} \cdot \vec{\Delta r} = E_{\text{kin}}(t_e) - E_{\text{kin}}(t_a)$$

$$\int \vec{F}_{\text{ges}} d\vec{r} = E_{\text{kin}}(t_e) - E_{\text{kin}}(t_a)$$

" E_{pot} " ?

$\Rightarrow$ welche Eigenschaft muss das Kraftfeld haben, damit die Gesamtenergie erhalten ist?

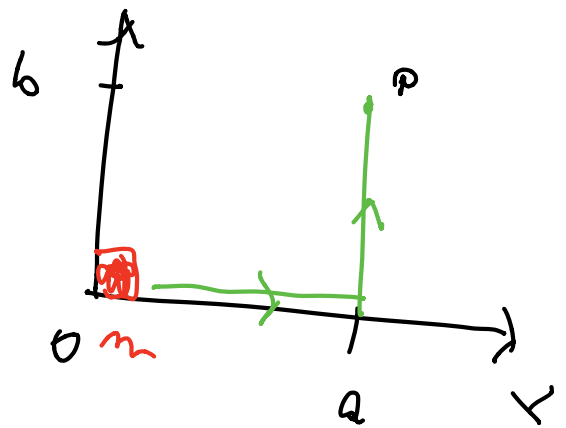
Bsp. A: Kraftfeld $\vec{F} = (3x, c, 0)$
 $\uparrow$
 const.

• Kraftfeld wirkt linear in x-Richtung,
 konstant in y-Richtung (d.h. $c = 0$ setzen)
 und hat keine Komponente in z-Richtung

Weg 1:

$$W_{\text{Weg 1}} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r}$$

$$\int_{(0,0)}^{(a,0)} \vec{F} d\vec{r} + \int_{(a,0)}^{(a,b)} \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow \int dx$$



$$\vec{dr} = dx + dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(a,0)} (F_x dx + F_y dy) + \int_{(a,0)}^{(a,b)} (F_x dx + F_y dy)$$

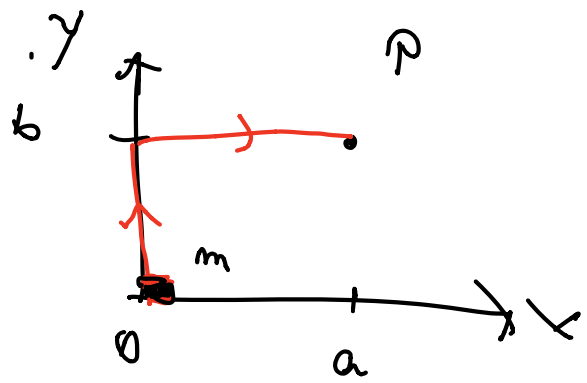
x-Komp. $\leftarrow$ $\leftarrow$ y-Komp.

$$= \int_0^a F_x dx + \int_0^0 F_y dy + \int_a^a F_x dx + \int_0^b F_y dy$$

$$= \int_0^a F_x dx + \int_0^b F_y dy = \int_0^a 3x dx + \int_0^b c dy$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^a + c \left[y \right]_0^b = \frac{3a^2}{2} + cb$$

Weg 2:



$$W_{\text{Weg 2}} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{(0,0)}^{(0,b)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{(0,b)}^{(a,b)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{F_x dx + F_y dy}{=} \int_{(0,0)}^{(0,b)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{(0,b)}^{(a,b)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^b F_x dx + \int_0^b F_y dy + \int_0^a F_x dx + \int_b^b F_y dy$$

$$= \int_0^b c dy + \int_0^a 3x dx = c[y]_0^b + 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$= cb + \frac{3}{2}a^2$$

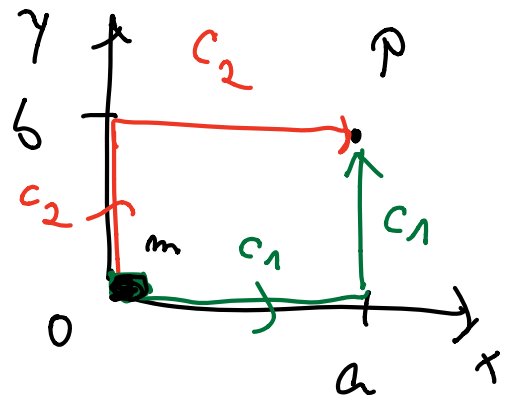
$$\Rightarrow W_{\text{Weg 1}} = W_{\text{Weg 2}}$$

$\Rightarrow$ geleistete Arbeit ist unabhängig vom gewählten Weg!

Bsp. B: Kraftfeld $\vec{F} = (3xy, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{const}}}{c}, 0)$

Weg 1:

$$W_{\text{Weg 1}} = \int_{(0,0)}^{(a,b)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(a,b)} F_x dx + F_y dy$$



$$= \int_{c_1} (F_x dx + F_y dy)$$

$$= \int_{(0,0)}^{(a,0)} (F_x dx + F_y dy) + \int_{(a,0)}^{(a,b)} (F_x dx + F_y dy)$$

$$= \int_{(0,0)}^{(a,0)} (3xy dx + c dy) + \int_{(a,0)}^{(a,b)} (3xy dx + c dy)$$

$$= \int_0^a 3xy dx + \int_0^0 c dy + \int_a^a 3xy dx + \int_0^b c dy$$

$$= 0 + c [y]_0^b = cb$$

Weg 2:

$W_{\text{Weg 2}} =$

$$\Rightarrow W_{\text{Weg 2}} \neq W_{\text{Weg 1}}$$

In diesem Fall: Arbeit hängt vom gewählten Weg ab!

Für konservative Kräfte gilt: die geleistete Arbeit ist vom gewählten Weg unabhängig!

Gibt es ein Kriterium für Kräfte mit der Eigenschaft "konservativ"?

⇒ Ein Kraftfeld $\vec{F}$ heisst "konservativ", wenn es ein Potential V gibt, so dass gilt:

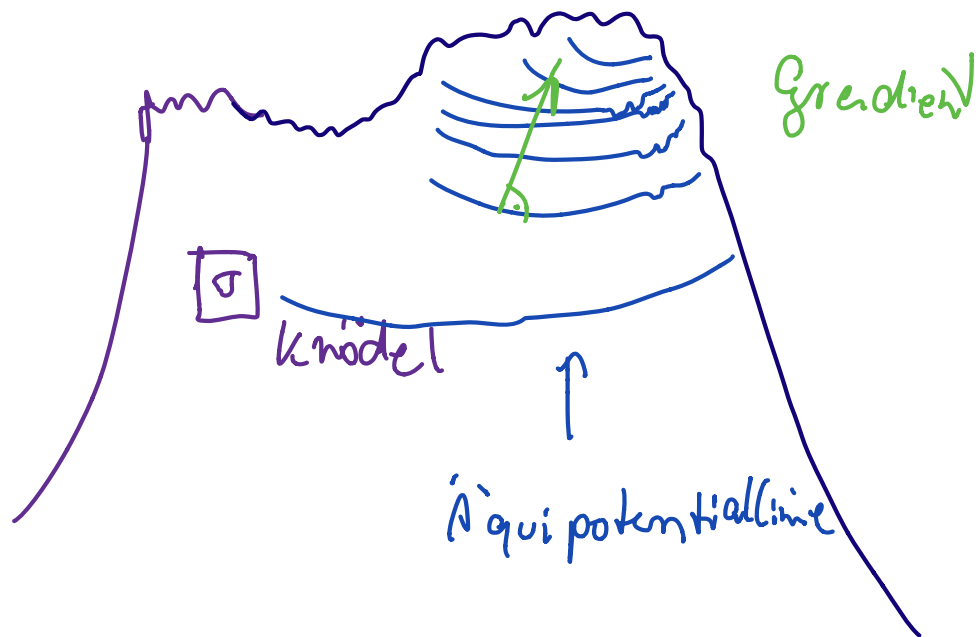
$$\vec{F} = - \vec{\nabla} V$$

Nabla-Operator $\frac{\partial}{\partial x} = \nabla = \nabla_x$ (1 Dim)

⇒ Man bildet den "Gradienten" einer Funktion!

1.9.2 Der Gradient

04.04.2020 4.2.2 und 9.2.1



$$\text{grad } f(x_1, \dots, x_n) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$$
$$= \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}$$

Was ist das? ... Partielle Ableitungen!

Partielle Ableitung: betrifft Funktionen mit mehreren Variablen

$$f(x_1, x_2): \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} := \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = \text{const}}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} := \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1 = \text{const}}$$

Bsp: $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^3$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + 5y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 5x + 3y^2$$

2. partielle Ableitung

Satz von Schwarz

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = \text{const}} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f \Big|_{x_2 = \text{const}}}{\partial x_1^2}$$

Satz von Schwarz: "Reihenfolge der Ableitungen",
 d.h. ob zuerst $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und danach $\frac{\partial}{\partial x_2}$ oder
 zuerst $\frac{\partial}{\partial x_2}$ und danach $\frac{\partial}{\partial x_1}$ gebildet wird,
 spielt keine Rolle!

$\Rightarrow$ d.h. die gemischten 2. partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

müssen identisch sein!