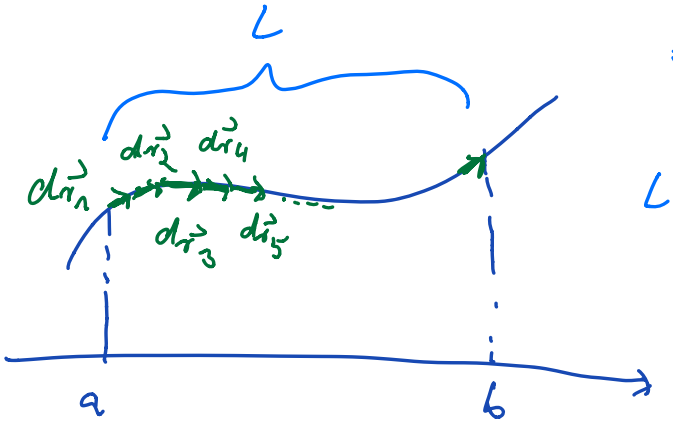
Otto, 6.3

1.8 Bogenlänge

Frage: Welche Strecke legt ein Körper längs der Kurve $\vec{r}(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t zurück?



≙ Bogenlänge L

$$L = \int (|d\vec{r}_1| + |d\vec{r}_2| + |d\vec{r}_3| + \ldots) = \int_a^b |d\vec{r}_i|$$

nicht praktikabel!

Weg 1: Kurve muss parametrisiert werden!

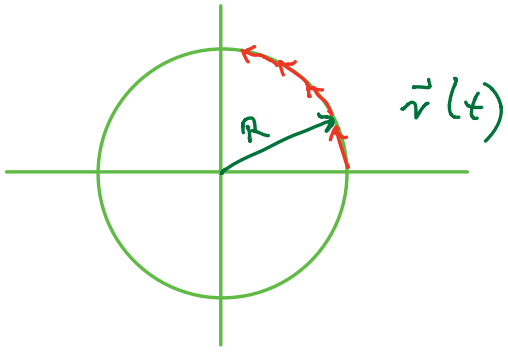
$\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit den Grenzen $\vec{r}(t_0) = \vec{a}$, $\vec{r}(t_E) = \vec{b}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \iff d\vec{r} = \vec{v}(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ Bogenlänge einer differenzierbaren Kurve $\vec{r}(t)$:

$$L = \int_a^b |d\vec{r}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |\dot{\vec{r}}|$$

Beispiel: Kreisumfang mit Radius R



Parametrisierung $\vec{r}(t)$ für den Kreis:

$\Rightarrow$ siehe Kreisgleichung

$$\vec{r}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$$

Ableitung berechnen:

$$\dot{\vec{r}}(t) = R\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = R\omega \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\Rightarrow L = \int |d\vec{r}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |\dot{\vec{r}}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, R\omega = \int_0^{t_E = T = \frac{2\pi}{\omega}} dt\, R\omega = \left[\frac{2\pi}{\omega} R\omega - 0\right]$$

$$= 2\pi R \quad \checkmark$$

Die Länge muss natürlich unabhängig von der gewählten Parametrisierung sein!

b) Kreisumfang in Polarkoordinaten allgemein

$$\vec{r}(t) = \big(r(t)\cos\varphi(t),\ r(t)\sin\varphi(t)\big)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \big(\dot r(t)\cos\varphi(t) - r(t)\dot\varphi(t)\sin\varphi(t),\ \dot r(t)\sin\varphi(t) + r(t)\dot\varphi(t)\cos\varphi(t)\big)$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\dot r^2\cos^2\varphi + r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi - 2r\dot r\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \dot r^2\sin^2\varphi + r^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + 2r\dot r\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi} = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}$$

$$\Rightarrow L = \int_{t_0}^{t_E} dt\ |\dot{\vec r}|^2 = \int_{t_0}^{t_E} dt\ \sqrt{\dot r^2(t) + r^2(t)\dot\varphi^2(t)}$$

Test: $r(t) = R = \text{const}$

$$= \int_{t_0} dt\ R\dot\varphi = R\int dt\ \frac{d\varphi}{dt} = R\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R$$ ✓ unabhängig von $\varphi(t)$!

Allgemein: Bogenlänge einer $y = f(x)$ bestimmen.

Was "läuft" bei $y = f(x)$? → x läuft

⇒ d.h. die Aufgabe ist es, eine geeignete Parametrisierung zu finden und den laufenden Parameter zu identifizieren

⇒ bei uns: Setz $x := t$, $y := f(t)$

Die Bahnkurve hat die Komponenten:

$$\vec r(t) = \big(t,\ f(t)\big) \quad \Rightarrow \dot{\vec r}(t) = \left(1,\ \frac{df(t)}{dt}\right) = \big(1,\ \dot f(t)\big)$$

↑ x-Komp. ↑ y-Komp.

Die Bogenlänge ergibt sich zu:

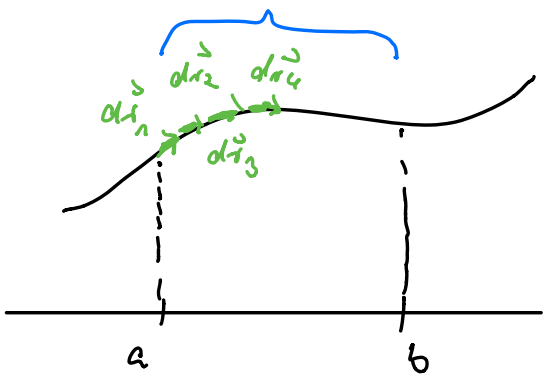
$$L = \int_{t_0}^{t_E} dt \, |\dot{\vec{r}}| = \int_{t_0}^{t_E} dt \, |(1, \dot{f}(t))|$$

$$= \int_{t_0}^{t_E} dt \, \sqrt{1 + (\dot{f}(t))^2}$$

Kap. 6.3 und 6.4

Weg 2: Parametrisierung des Bogenelementes

$\int |d\vec{r}_i| = \int \sqrt{ds^2}$ direkt $\Rightarrow$ "Wegintegral" oder "Linienintegral"



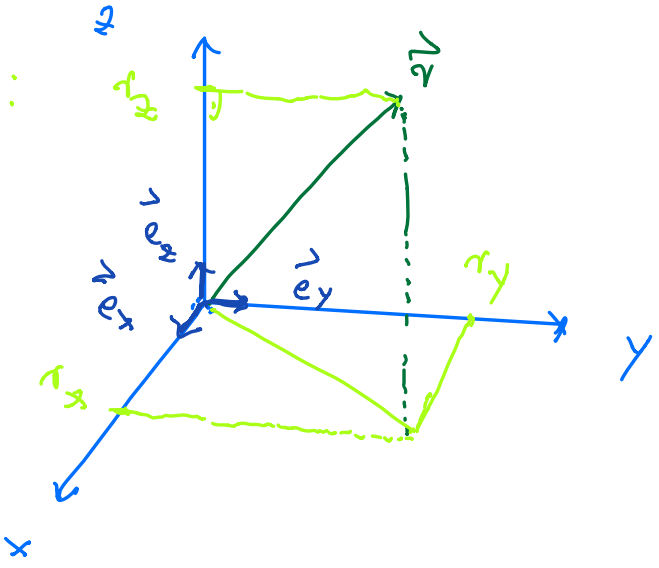
Linienelement: $ds^2 := d\vec{r} \cdot d\vec{r}$

Anmerkungen:
- Das Linienelement ds^2 leitet sich aus dem totalen Differential einer Kurve ab
- Es wird Linien- oder auch Bogenelement genannt

Wie sieht das Linienelement in den verschiedenen Koordinatensystemen aus?

Koordinatensysteme:

a) Kartesische Koordinaten x, y, z



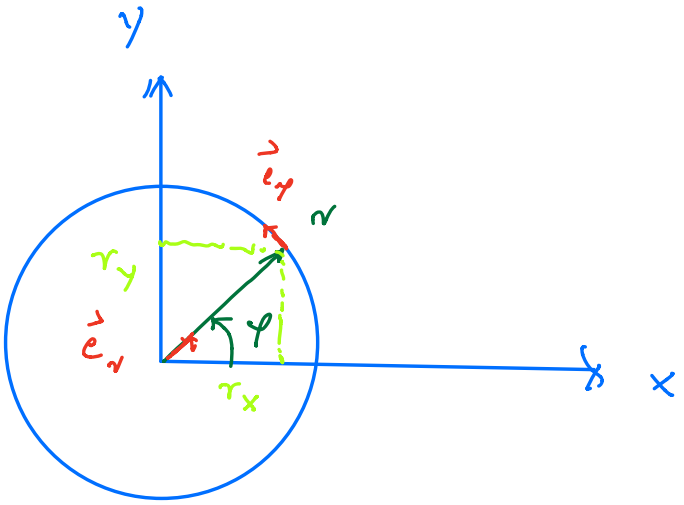
$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ mit $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

Basisvektoren:

$\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$, $\vec{e}_z = (0,0,1)$

orthonormales System, d.h. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

b) Polarkoordinaten (2-Dim.) r, φ



$\vec{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ mit $|\vec{r}| = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$

mit

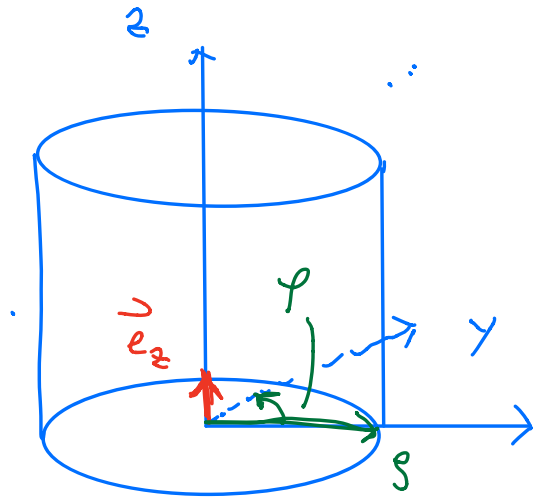
$\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ und $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$

in der kartesischen Basis (x, y).

Nebenbemerkung:
Die Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ in der (r, φ)-Basis lauten: $\vec{e}_r = (1, 0), \vec{e}_\varphi = (0, 1)$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ sind ebenfalls orthonormal.

c) Zylinderkoordinaten (3 Dim.) ρ, φ, z



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Radius in der x,y-Ebene

Umkehrung von kartesischen in Zylinder-koordinaten:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

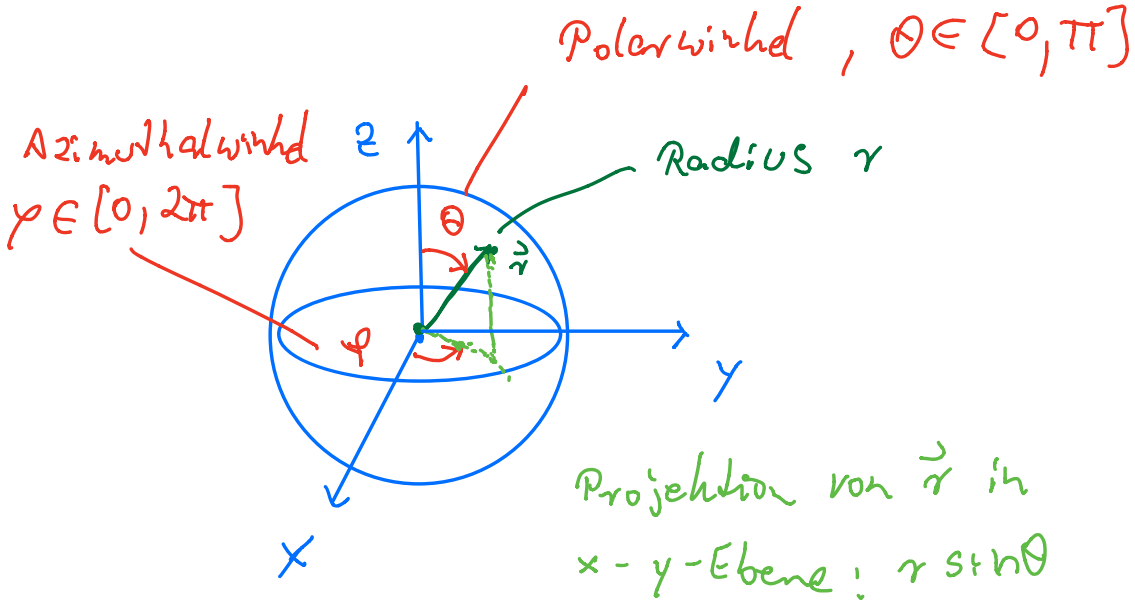
Einheitsvektoren (in x,y,z-Basis):

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nebenbemerkung: $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ in (ρ, φ, z)-Basis:

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Kugelkoordinaten (3D) r, θ, φ



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Umrechnung von kartesischen in Kugelkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Basisvektoren (in x,y,z-Basis):

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nebenbemerkung: $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ in (r,θ,φ)-Basis?

Zurück zu den Linienelementen:

- kartesische KO: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- Polarkoordinaten: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$
- Zylinderkoordinaten: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$
- Kugelkoordinaten: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$

Beispiel: Nochmal Kreisumfang in Polarkoordinaten allgemein, aber nun mittels Weg 2!

Polarkoordinaten

$$L = \int |d\vec{r}_i| = \int \sqrt{ds^2} \overset{\downarrow}{=} \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

Die Kreisgleichung lautet

$$\vec{r}(t) = \big(r(t)\cos(\varphi(t)),\ r(t)\sin(\varphi(t))\big)$$

$$= \int_C \sqrt{dr(t)^2 + r^2(t)\, d\varphi^2(t)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{dt^2 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + r^2(t)\, dt^2 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}}$$

, da $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2\pi) = 2\pi$

$$= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2(t)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} \quad \checkmark \quad \text{wie vorher}$$