Basisvektoren der Polarkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{ radial nach außen}$$

Gesucht: orthogonaler Vektor $\vec{e}_\varphi$ zu $\vec{e}_r$ mit Länge 1

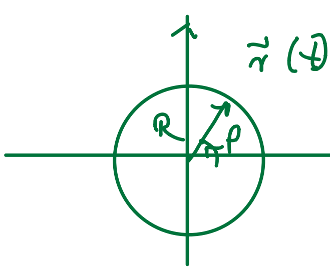
$$\rightarrow \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi \overset{!}{=} 0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{\varphi x} \\ e_{\varphi y} \end{pmatrix} = \cos\varphi \, e_{\varphi_x} + \sin\varphi \, e_{\varphi_y}$$

Wähle: $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ („–" bei x-Komponente, da Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn!)

D.h. $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ im kartesischen Koordinatensystem (x,y).

Zurück zur kreisförmigen Bahnkurve:



$$|\vec{r}| = R = \text{const}$$

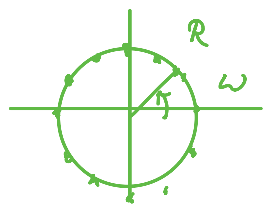
$$\vec{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Da $\varphi = \varphi(t)$ zeitabhängig:

$$\vec{r}(\varphi(t)) = R \left(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)) \right) \quad (☆)$$

1. Fall: konstante Drehgeschwindigkeit, d.h. Weg um 2π braucht jeweils die Zeit T:

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \text{const.}$



} äquidistante Verteilung Punkte $\hat{=}$ Ortsvektoren in gleichen Zeitabständen

Bahnkurve:

Aus (☆) ergibt sich:

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos(\omega t), \sin(\omega t)\right)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = R\omega\left(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)\right)$$

mit $$|\vec{v}(t)| = R\omega\sqrt{(-\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2} = R\omega$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = R\omega^2\left(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)\right) = -R\omega^2(\cos\omega t, \sin\omega t)$$

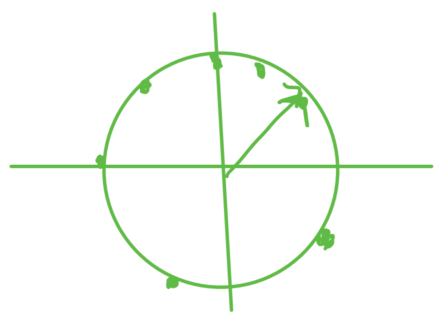
$$= \vec{a}(t)$$

$$|\vec{a}(t)| = R\omega^2\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = R\omega^2$$

2. Fall: allgemeine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) := \frac{d\varphi}{dt}$$

infinitesimale Änderungen Δt



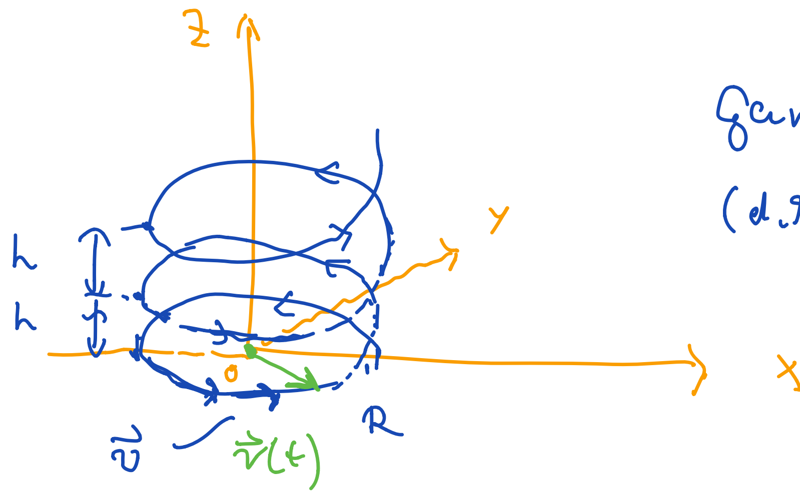
1.7.3 Zusammengesetzte Bewegungen

Ziel: aus geradlinigen + kreisförmigen Bewegungen

→ beliebige Bewegungen zusammensetzen

→ Vektoraddition „Superpositionsprinzip"

Beispiel: Spiralbewegung



Ganghöhe h

(d.h. h / Umdrehung)

Ortsvektor $\vec{r}(t)$ durchläuft eine Spiral-bewegung um die z-Achse, wie beschreiben wir diese Bahnkurve?

⇒ (1.) Rotation in x-y-Ebene um Ursprung

(2.) geradlinige Bewegung in z-Richtung vom Ursprung aus zu 1. $\vec{r}_{1}(t) = R\left(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0\right)$

und

zu 2. $\vec{r}_{2}(t) = (0, 0, v_z t)$

Wie hängen diese Bewegungsanteile nun zusammen?

$\Rightarrow$ Prinzip der Periodizität: feste Bedingung durch Ganghöhe!

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \vec{r}_{2}(t=T) = r_{2}\left(t=\frac{2\pi}{\omega}\right) = \left(0, 0, v_z \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$\underbrace{\hat{=} (0, 0, h)}_{v_z \frac{2\pi}{\omega} = h \;\rightarrow\; v_z = \frac{h\omega}{2\pi}}$$

Nun die Überlagerung:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{1}(t) + \vec{r}_{2}(t) = \left(R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), \frac{h\omega}{2\pi} t\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), \frac{h\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \left(-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t), 0\right)$$

Wie groß sind $|\vec{v}|$ und $|\vec{a}|$ einer Spiralbewegung?

$\Rightarrow$ Beträge bilden und mit einer reinen Kreisbewegung vergleichen:

$$|\vec{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2\omega t + R^2\omega^2 \cos^2\omega t + \frac{h^2\omega^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt{R^2\omega^2 + \frac{h^2\omega^2}{4\pi^2}} = R\omega\sqrt{1 + (h/2\pi R)^2}$$

$$> R\omega$$

"Geschwindigkeit höher, da Strecke länger ist als bei einer reinen Kreisbewegung!"

$$|\vec{a}| = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t + R^2\omega^4\sin^2\omega t}$$

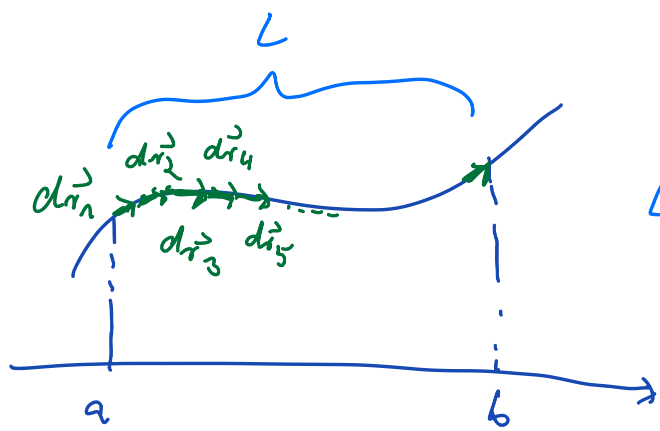
$$= \sqrt{R^2\omega^4} = R\omega^2$$

„Beschleunigung wie vorher, da Spiralumdrehung der Kreisbewegung entspricht!"

Otto, 6.3

1.8 Bogenlänge

Frage: Welche Strecke legt ein Körper längs der Kurve $\vec{r}(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t zurück?



„Bogenlänge L"

$$L = \int (|d\vec{r}_1| + |d\vec{r}_2| + |d\vec{r}_3| + \dots)$$

$$= \int_a^b |d\vec{r}_i|$$

nicht praktikabel!

Daher: Kurve muss parametrisiert werden!

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit den Grenzen $\vec{r}(t_0) = \vec{a}$, $\vec{r}(t_E) = \vec{b}$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \iff d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\, dt$$

$\Rightarrow$ Bogenlänge einer differenzierbaren Kurve $\vec{r}(t)$:

$$L = \int_a^b |d\vec{r}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |\dot{\vec{r}}|$$

Die Länge muss natürlich unabhängig von der gewählten Parametrisierung sein.

Allgemein: Bogenlänge einer $y = f(x)$ bestimmen

was "läuft" bei $y = f(x)$? $\to$ x läuft

$\Rightarrow$ d.h. die Aufgabe ist es, eine geeignete Parametrisierung zu finden und den laufenden Parameter zu identifizieren

$\Rightarrow$ bei uns: Zeit $x := t$, $y = f(t)$

Die Bahnkurve hat die Komponenten:

$$\vec{r}(t) = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{x-Komp.}}}{t}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{y-Komp.}}}{f(t)}) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \left(1, \frac{df(t)}{dt}\right)$$

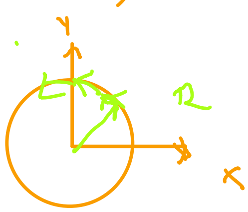
$$= (1, \dot{f}(t))$$

Die Bogenlänge ergibt sich zu:

$$L = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |\dot{\vec{r}}| = \int_{t_0}^{t_E} dt\, |(1, \dot{f}(x))|$$

$$= \int_{t_0}^{t_E} dt\, \sqrt{1 + (\dot{f}(x))^2}$$

Beispiel: a) Kreisumfang mit Radius R



Gesucht: Parametrisierung $\vec{r}(t)$

mit $\vec{r}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = R(-\omega \sin \omega t, \omega \cos \omega t)$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = R\omega$$

Integrationsgrenzen: $t_0 = 0$ und $t_E = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi/\omega} dt\, R\omega = \omega R \left(\frac{2\pi}{\omega} - 0 \right) = 2\pi R$$

b) Kreisumfang allgemein: R nicht mehr fixiert!

In Polarkoordinaten:

x-Koordinate: $R \cos \omega t + r(t) \cos(\varphi(t))$

y-Koordinate: $R \sin \omega t + r(t) \sin(\varphi(t))$