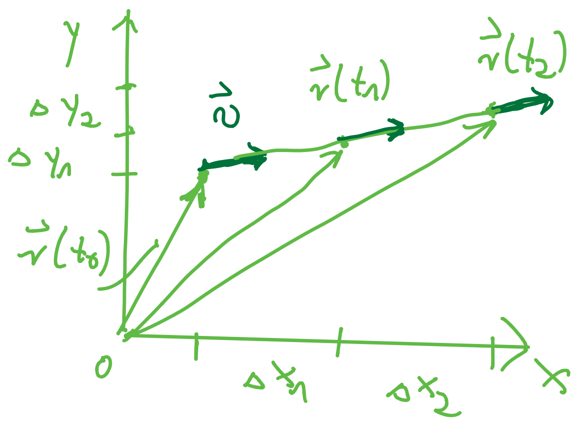
1.7 Bahnkurven von geraden und kreisförmigen Bewegungen

1.7.1 Geradlinige Bewegung

Bsp.:

a) Auto fährt entlang einer Straße mit konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_0$



gleichförmige Bewegung

$\hat{=}$ konstantes $\vec{v}$

$\Rightarrow$ Punkte äquidistant verteilt für gleiche Zeitabstände

Bahnkurve:

Bekannt: $v = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{„Weg"}}{\text{„Zeit"}}$ (1-Dim.)

$\Delta s = v \Delta t$

$\Delta s \hat{=} ds$

$\Delta t \hat{=} dt$

infinitesimal

$$ds = v\,dt \quad \Big| \int$$

$$\int_{s(t_0)}^{s(t_1)} ds = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt$$

$$s(t_1) - s(t_0) = v\,(t_1 - t_0) \overset{t_0=0}{=} v\,t$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = s(t_0) + v\,t$$

Nun: Beschreibung in 2 oder 3 Dimensionen

$\Rightarrow$ ersetze s durch $\vec{r}\,(x, y, z)$

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t$$

$\hat{=}$ Geradengleichung mit Steigung $|\vec{v}|$

$$\| \; g(\lambda):\ \vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}\,\lambda \; \|$$

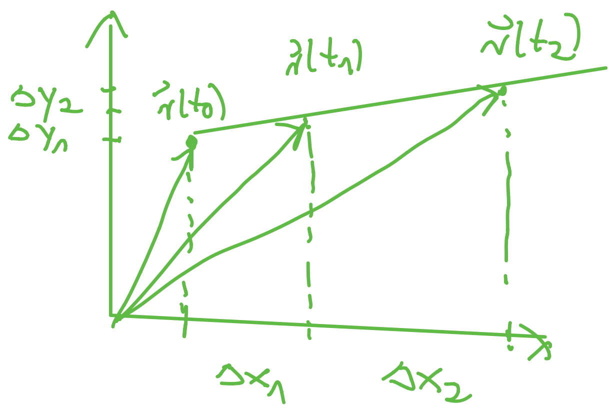
Geschwindigkeit:

$$\dot{\vec{r}}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \overset{\text{hier}}{=} \text{const.}$$

Beschleunigung:

$$\ddot{\vec{r}}\,(t) = \vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \overset{\text{hier}}{=} 0 \quad \text{, da } \vec{v} = \text{const.}$$

b) Auto leitet Überholvorgang ein und beschleunigt, $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) \neq 0 = \vec{a}_0$



beschleunigte Bewegung
$\hat{=}$ $\vec{v}(t)$ t-abhängig
$\Rightarrow$ Punkte nicht mehr äquidistant für gleiche Zeitabstände!

Ziel: Bahnkurve für beschleunigte Bewegung herleiten

Da $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t)$

$$\rightarrow \quad d\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \, dt \qquad | \int$$

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \, t + \vec{v}_0$$

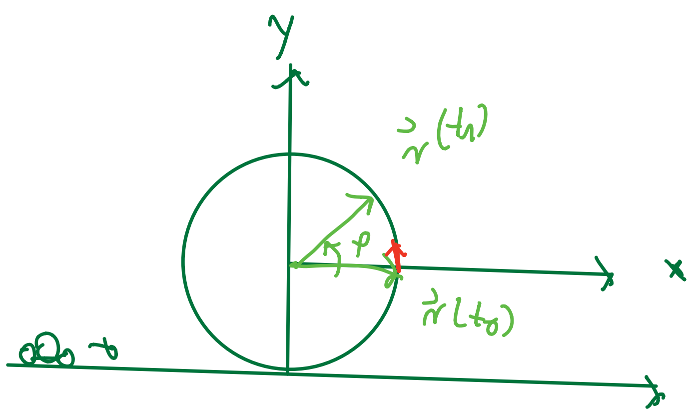
d.h. $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) \, dt$

$$= \int (\vec{a}_0 \, t + \vec{v}_0) \, dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0(t)$$

$\Rightarrow$ Bahnkurve einer geradlinig beschleunigten Bewegung

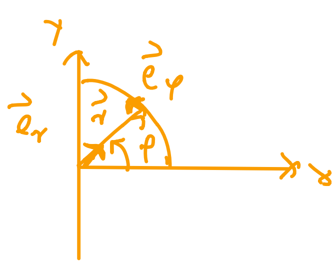
1.7.2 Kreisbewegung (2D)



$$|\vec{r}(t)| = R$$

Drehbewegung: Polarkoordinaten geeignet

Einschub: Polarkoordinaten r, φ (ebene Bewegung)



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad (*)$$

jeder Punkt der Ebene (x,y) ist erreichbar mit $r = [0, \infty[$ und $\varphi = [0, 2\pi]$

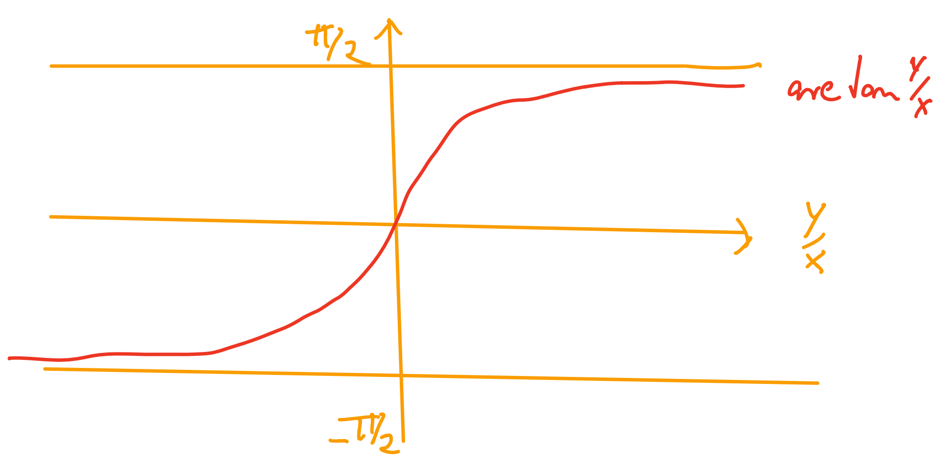
Umrechnung von kartesischen Koordinaten (x,y) auf Polarkoordinaten (r, φ):

- Quadrieren und addieren von $(*)$:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$$

- Dividieren von $(*)$:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin\varphi}{r \cos\varphi} = \tan\varphi \quad \text{d.h. } \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$



Basisvektoren der Polarkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{radial nach außen}$$

Gesucht: orthogonaler Vektor $\vec{e}_\varphi$ zu $\vec{e}_r$ mit Länge 1

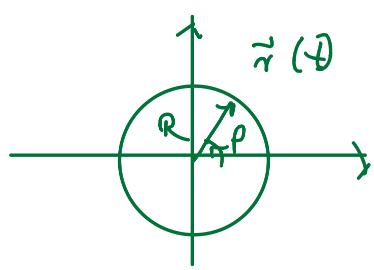
$$\rightarrow \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi \overset{!}{=} 0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{\varphi x} \\ e_{\varphi y} \end{pmatrix} = \cos\varphi \, e_{\varphi_x} + \sin\varphi \, e_{\varphi_y}$$

Wähle: $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ ("-" bei x-Komponente, da Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn!)

D.h. $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ im kartesischen Koordinatensystem (x, y).

Zurück zur kreisförmigen Bahnkurve:



$$|\vec{r}| = R = \text{const}$$

$$\vec{r}(t)$$

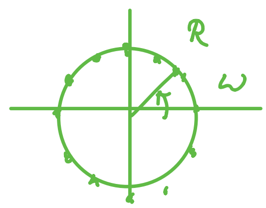
$$\vec{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Da $\varphi = \varphi(t)$ zeitabhängig:

$$\vec{r}(\varphi(t)) = R \big(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))\big) \quad (\star)$$

1. Fall: konstante Drehgeschwindigkeit, d.h. Weg um 2π braucht jeweils die Zeit T:

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} = const.$



äquidistante Verteilung Punkte $\hat{=}$ Ortsvektoren in gleichen Zeitabständen

Bahnkurve:

Aus (☆) ergibt sich:

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos(\omega t), \sin(\omega t)\right)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = R\omega\left(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)\right)$$

mit $|\vec{v}(t)| = R\omega\sqrt{(-\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2} = R\omega$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = R\omega^2\left(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)\right) = -R\omega^2(\cos\omega t, \sin\omega t)$$

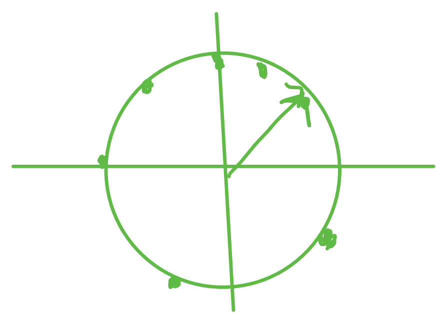
$$= \vec{a}(t)$$

$$|\vec{a}(t)| = R\omega^2\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = R\omega^2$$

2. Fall: allgemeine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) := \frac{d\varphi}{dt}$$

infinitesimal Änderungen Δt



1.7.3 Zusammengesetzte Bewegungen

Ziel: aus geradlinigen + kreisförmigen Bewegungen

→ beliebige Bewegungen zusammensetzen

→ Vektoraddition "Superpositionsprinzip"