

Vektorprodukt und doppelte Vektorprodukte:

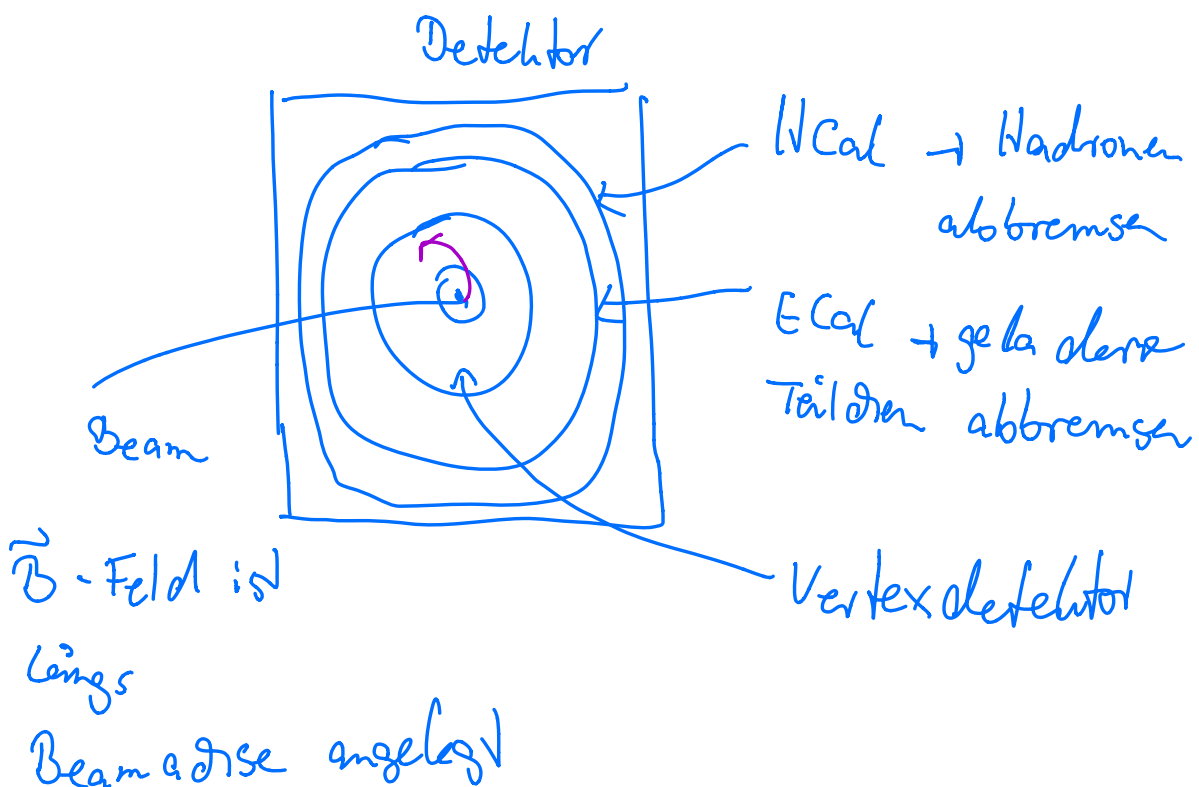
$$\vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}), \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}),$$

... $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d})$, ... im Prinzip bekannt.

Wofür brauchen wir das?

Anwendungen: häufig, wenn Lorentzkräfte auftreten!

$$\text{Lorentzkraft} \quad \vec{F} = q \vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B})$$

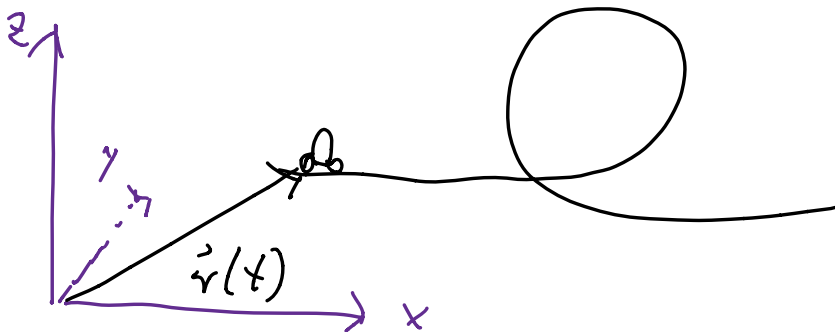


$\Rightarrow \text{Fung}(\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow$ Impuls der Teilchen
aus Bahnkrümmung
bestimmen!

1.6 Vektorgleichungen

04.0, 1.4

Was ist das? Wofür brauchen wir sie?

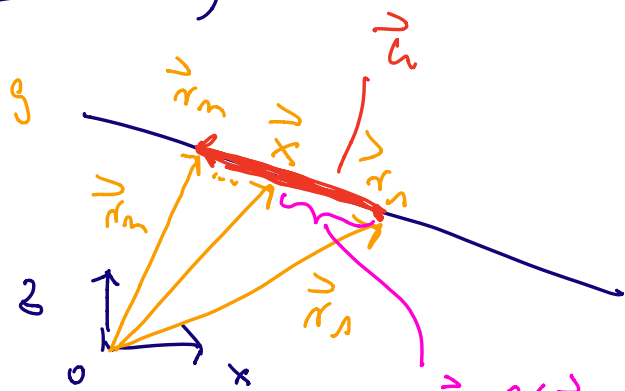


Ziel: alle Bahnkurven, d.h. auch Kurven/
Formen mit Hilfe von Koordinaten-
Systemen und Vektoren ausdrücken.

Vektorgleichungen $\hat{=}$ Gleichungen, die
vektoriell beschreiben!

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Geraden} \\ \text{Ebenen} \\ \text{Kreise} \\ \text{Kugeln} \end{array} \right.$

1.6.1 Gerade



alle Punkte auf
Geraden g durch
Ortsvektoren

$\vec{r}_i, i=1, \dots, \infty$

$\lambda \vec{u} = \lambda (\vec{r}_n - \vec{r}_1)$ beschreiben.

vorgehen: $\vec{u} = \vec{r}_n - \vec{r}_1$ beschreibt Richtung
der Gerade

$$\lambda \vec{u} = \lambda (\vec{r}_n - \vec{r}_1)$$

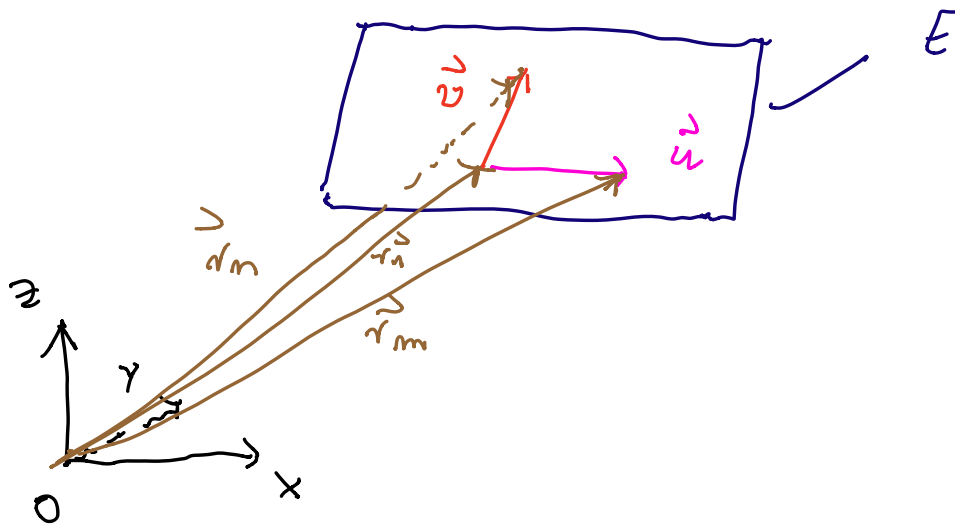
Die Menge aller Punkte $\vec{x}$ auf der
Geraden g läßt sich parametrisieren:

$$g(\lambda): \vec{x} = \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_n - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{u}$$

λ Parameter
Problem: Bestimme die Geradengleichung, die eine
Gerade beschreibt, die durch die
Punkte $P_1 = (2, 1, -1)$ und $P_2 = (3, 1, 2)$ geht

1.6.2 Ebene

Idee 1: Man nehme eine Gerade und einen weiteren Richtungsvektor, der in die andere Richtung zeigt.



Ebene:

$$\begin{aligned} E(\lambda, \mu): \vec{x} &= \vec{r}_n + \lambda (\vec{r}_m - \vec{r}_n) + \mu (\vec{r}_m - \vec{r}_n) \\ &= \vec{r}_n + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \end{aligned}$$

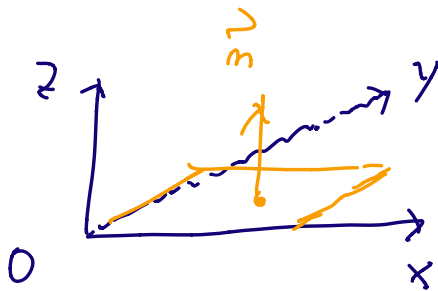
$\Rightarrow$ alle Punkte $\vec{x}$ auf der Ebene E mit λ, μ beschreibbar.

Idee 2: Eine Ebene (durch den Ursprung)
mittels des Normalenvektors $\vec{n}$
beschreiben.

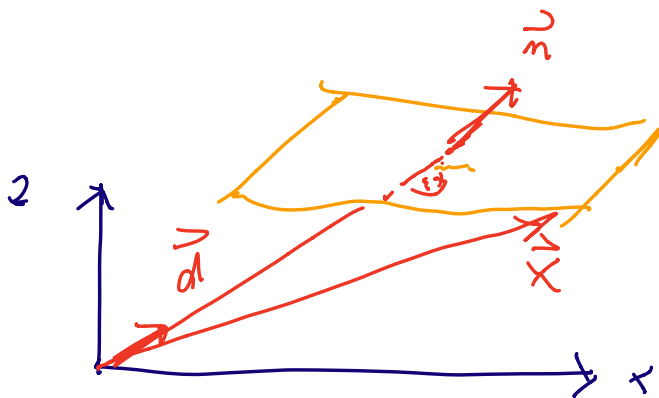
$\Rightarrow$ alle Vektoren $\vec{x}$ in der Ebene sind $\perp \vec{n}$:

d.h. es muß gelten:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = 0 = n_1 x + n_2 y + n_3 z$$



Allgemeiner Fall, d.h. Ebene beliebig (d.h.
nicht durch den Ursprung)



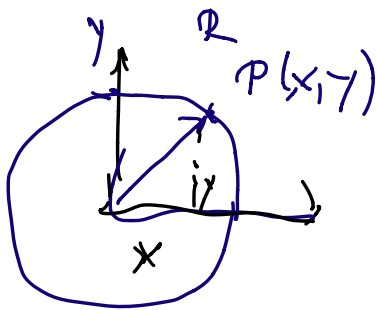
$$\vec{n} \cdot \vec{x} = n \cdot x_{\parallel} = n d$$

⇒ Hesse'sche Normalenform einer Ebene

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - m d = 0$$

$$\text{d.h. } \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{x} - d = \vec{e}_n \cdot \vec{x} - d = 0$$

1.6.3 Kreisgleichung



Kreisgleichung:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

oder in anderer Schreibweise

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

⇒ Als Skalarprodukt beschreiben!

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

$$\text{d.h. } \left(\vec{x} \right)^2 = R^2 \quad \text{mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen Fall, d.h. Mittelpunkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix} = R^2 \quad \text{bzw.} \quad (\vec{x} - \vec{x}_0)^2 = R^2$$

$$\text{d.h. } |\vec{x} - \vec{x}_0| = R$$

1.6.4 Kugel

$\Rightarrow$ Kreis in 3-Dim

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{bzw.}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Vektorielle Schreibweise!

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ x_3 - x_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ x_3 - x_{30} \end{pmatrix} = R^2$$

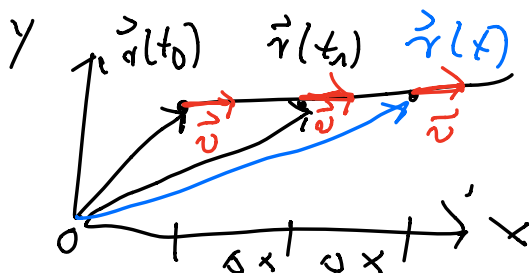
$$\text{d.h. } (\vec{x} - \vec{x}_0)^2 = R^2$$

$$\text{bzw. } \left| \vec{x} - \vec{x}_0 \right| = R$$

1.7 Bahnkurve

1.7.1 Bahnkurve einer geradlinigen Bewegung

Beispiel a, : Auto fährt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$



gleichförmige Bewegung, d.h. konstantes $\vec{v}$

d.h. Punkte sind äquidistant verteilt
für gleiche Zeitabstände!