

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad \text{"Auswendig lernen" o.h.}$$

Regel von Sarrus

$\hat{=}$ Herleitung mittels "Determinanten"

$\hat{=}$ Herleitung mittels Levi-Civita-Tensor

Warum reicht nicht einfach "Regel von Sarrus"?

$\Rightarrow$ Verallgemeinerung auf Dimension > 3 !

$\Rightarrow$ z.B. - später, Relativitätstheorie - Vektoren in 4 Dimensionen (x, y, z und t)

- komponenten Schreibweise mit Levi-Civita-Tensor

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad \text{mit}$$

Levi-Civita Symbol ε_{ijk} , $i,j,k = 1,2,3$

(3-fach indizierte total
antisymmetrische Tensor)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i,j,k \text{ zyklisch} \\ 0 & \text{falls wenn mind. zwei Ind. gleich} \\ -1 & i,j,k \text{ antizyklisch} \end{cases}$$

Wie benutzt man ε_{ijk} ? $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

Man nehme explizit: $i=1$

$$\begin{aligned} (a \times b)_1 &= \sum_{j,k=2,3} \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{123}}_{(+1)} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{(-1)} a_3 b_2 \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned}$$

$$(a \times b)_2 = \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1$$

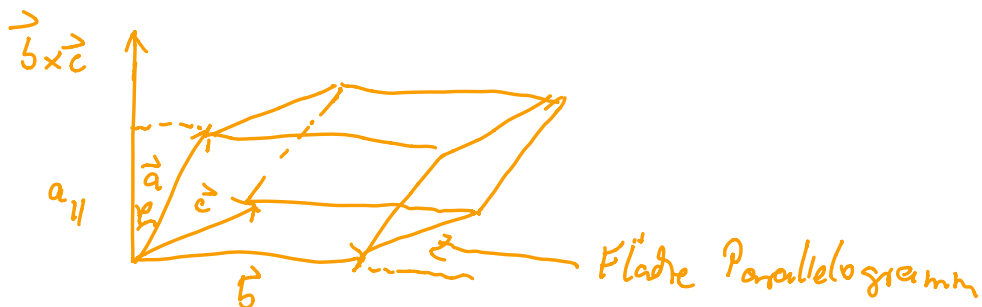
$$(a \times b)_3 = \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Doppelte Produkte:

a) Spatprodukt

$$\underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}_{\vec{v}} = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \varphi = V$$

(Volumen des Spats)



Eigenschaften:

• zyklisch: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

$\Rightarrow$ d.h. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) = 0$

b) Doppeltes Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{"bac-cab"}$$

Vorsicht:

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ nicht zyklisch!

Status: im Prinzip sind noch alle
Verknüpfungsarten bekannt!

Anwendung: $(\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\vec{v}}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = ?$

$\Rightarrow$ d.h. zu berechnen:

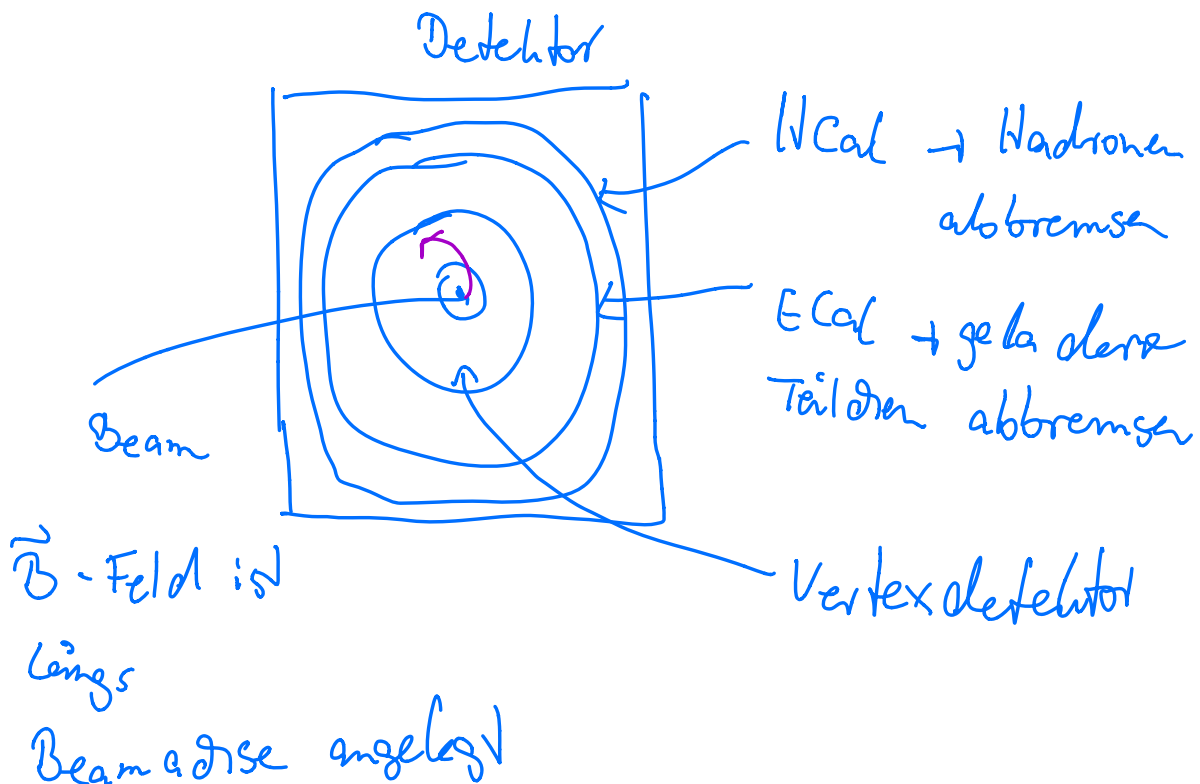
$$\vec{v} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c} \cdot (\vec{d} \times \vec{v}) = \vec{c} \cdot [\vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b})]$$

$$= \vec{c} \left[\underbrace{\vec{a}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Vektor}}} \underbrace{(\vec{d} \vec{b})}_{\substack{\uparrow \\ \text{Zahl}}} - \underbrace{\vec{b}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Vektor}}} \underbrace{(\vec{d} \vec{a})}_{\substack{\uparrow \\ \text{Zahl}}} \right]$$

u.ä. $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \vec{c})(\vec{d} \vec{b}) - (\vec{c} \vec{b})(\vec{d} \vec{a})$

Anwendungen: häufig, wenn Lorentzkräfte auftreten!

Lorentzkraft $\vec{F} = q \vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B})$

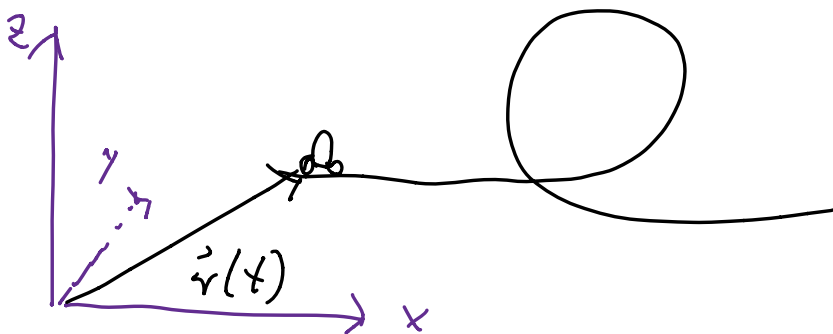


$\Rightarrow \text{Fung}(\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow \ddot{\text{Impuls der Teilchen}}$
aus Bahnkrümmung
bestimmen!

1.6 Vektorgleichungen

04.0, 1.4

Was ist das? Wofür brauchen wir sie?

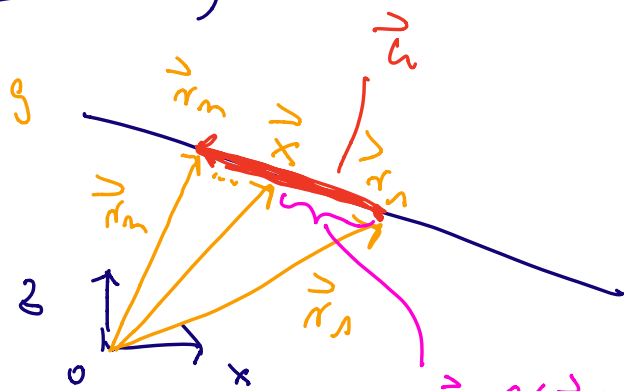


Ziel: alle Bahnkurven, d.h. auch Kurven/
Formen mit Hilfe von Koordinaten-
Systemen und Vektoren ausdrücken.

Vektorgleichungen $\hat{=}$ Gleichungen, die
vektoriell beschreiben!

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Geraden} \\ \text{Ebenen} \\ \text{Kreise} \\ \text{Kugeln} \end{array} \right.$

1.6.1 Gerade



alle Punkte auf
Geraden g durch
Ortsvektoren

$\vec{r}_i, i=1, \dots, \infty$

$\lambda \vec{u} = \lambda (\vec{r}_n - \vec{r}_1)$ beschreiben.

vorgehen: $\vec{u} = \vec{r}_n - \vec{r}_1$ beschreibt Richtung
der Gerade

$$\lambda \vec{u} = \lambda (\vec{r}_n - \vec{r}_1)$$

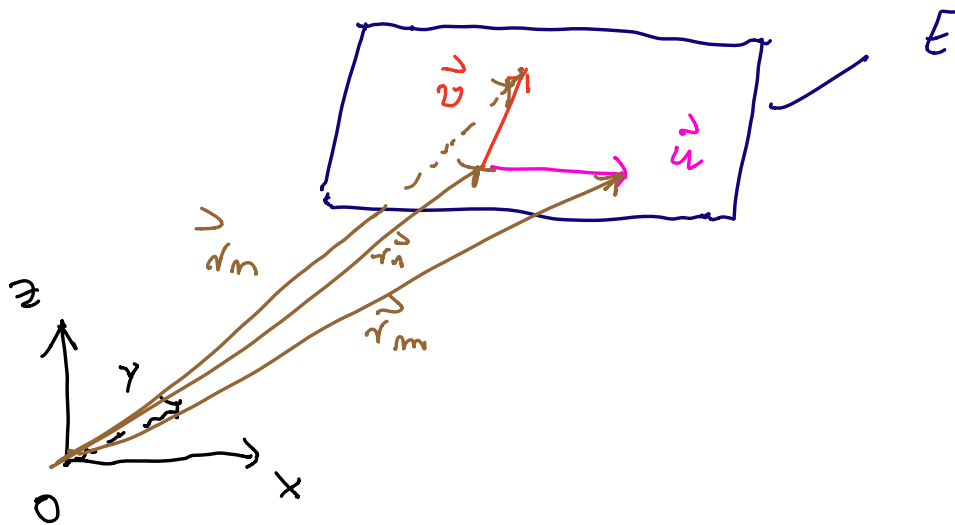
Die Menge aller Punkte $\vec{x}$ auf der
Geraden g läßt sich parametrisieren:

$$g(\lambda): \vec{x} = \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_n - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{u}$$

λ Parameter
Problem: Bestimme die Geradengleichung, die eine
Gerade beschreibt, die durch die
Punkte $P_1 = (2, 1, -1)$ und $P_2 = (3, 1, 2)$ geht

1.6.2 Ebene

Idee 1, $\vec{u}$ Man nehme eine Gerade und einen weiteren Richtungsvektor, der in die andere Richtung zeigt.



Ebene:

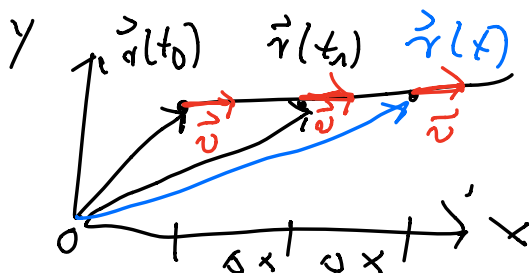
$$\begin{aligned} E(\lambda, \mu): \vec{x} &= \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_m - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_n - \vec{r}_1) \\ &= \vec{r}_1 + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ alle Punkte $\vec{x}$ auf der Ebene E mit λ, μ beschreibbar.

1.7 Bahnkurve

1.7.1 Bahnkurve einer geradlinigen Bewegung

Beispiel a): Auto fährt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$



gleichförmige Bewegung, d.h. konstantes $\vec{v}$

d.h. Punkte sind äquidistant verteilt
für gleiche Zeitabstände!