

Erzwungene Schwingungen

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_0 \cos(\tilde{\omega} t) \quad (\diamond)$$

inhomogene Dgl. 2. Ordnung

Lösung:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{speziell}}(t)$$

Ansatz:

Lösung von $(\diamond)$:

als Exp.funktion schreiben

$$\text{Ansatz: } \underline{x}_{\text{speziell}} = C \cos(\tilde{\omega} t - \gamma) \stackrel{\downarrow}{=} \text{Re} \left[C e^{i(\tilde{\omega} t - \gamma)} \right]$$

$\uparrow$
externe Kraft rennt immer voraus

Wieder 2 Konstanten C, γ (Dgl. 2. Ordnung!),
aber haben sie wieder mit Anfangsbe-
dingungen zu tun?

II. Einsetzen

$$\dot{x}_{\text{speziell}} = \text{Re} \left[C i \tilde{\omega} e^{i(\tilde{\omega} t - \gamma)} \right]$$

$$\ddot{x}_{\text{speziell}} = \text{Re} \left[-C \tilde{\omega}^2 e^{i(\tilde{\omega} t - \gamma)} \right]$$

$$m \operatorname{Re}[-C \tilde{\omega}^2 e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}] + b \operatorname{Re}[C i \tilde{\omega} e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}] + k \operatorname{Re}[C e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}] = \operatorname{Re}[F_0 e^{i\tilde{\omega}t}]$$

$$\operatorname{Re}\{(-C \tilde{\omega}^2 m + C k) e^{i\tilde{\omega}t} e^{-i\gamma} + i b \tilde{\omega} C e^{i\tilde{\omega}t} e^{-i\gamma}\} = \operatorname{Re}(F_0 e^{i\tilde{\omega}t})$$

$$(-m \tilde{\omega}^2 + k)C [\cos \tilde{\omega}t \cos \gamma + \sin \tilde{\omega}t \sin \gamma] - b \tilde{\omega} C [-\cos \tilde{\omega}t \sin \gamma + \sin \tilde{\omega}t \cos \gamma] = F_0 \cos \tilde{\omega}t$$

ordnen nach 'sin' und 'cos'-Termen:

$$\cos \tilde{\omega}t \{(-m \tilde{\omega}^2 + k) \cos \gamma + b \tilde{\omega} \sin \gamma\} C + \sin \tilde{\omega}t \{(-m \tilde{\omega}^2 + k) \sin \gamma - b \tilde{\omega} \cos \gamma\} C = F_0 \cos \tilde{\omega}t$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten ($\forall t$) erfüllt sein muß, müssen die 'cos'- und 'sin'-Terme separat erfüllt sein!

$$\text{I. } \cancel{\cos \tilde{\omega}t} \{(-m \tilde{\omega}^2 + k) \cos \gamma + b \tilde{\omega} \sin \gamma\} C = F_0 \cancel{\cos \tilde{\omega}t}$$

$$\text{II. } \cancel{\sin \tilde{\omega}t} \{(-m \tilde{\omega}^2 + k) \sin \gamma - b \tilde{\omega} \cos \gamma\} C = 0$$

Aus II. erhalten wir:

$$(-m\tilde{\omega}^2 + R) \sin \gamma = b\tilde{\omega} \cos \gamma$$

$$\tan \gamma = \frac{b\tilde{\omega}}{-m\tilde{\omega}^2 + R} = \frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\text{d.h.} \quad \gamma = \arctan \left[\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right]$$

in Gleichung I. einsetzen:

$$[(-m\tilde{\omega}^2 + R) + b\tilde{\omega} \tan \gamma] \cos \gamma = \frac{F_0}{c}$$

NR: Was ist $\cos(\arctan[\gamma]) = ?$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos(\arctan[\gamma]) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan[\gamma])}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ I. ergibt:

$$\left[\underbrace{(-m\tilde{\omega}^2 + k)}_{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} + b\tilde{\omega} \frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right] \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2}} = \frac{F_0}{C}$$

$$\left[1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2}} = \frac{F_0}{C m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2} = \frac{F_0}{C m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\Rightarrow C = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + b^2 \tilde{\omega}^2}}$$

d.h. alle Konstanten der speziellen Lösung der inhomogen Gleichung x_{speziell} , d.h. C und γ , sind vollständig festgelegt!

Zurück zur allgemeinen Lösung der Dgl.
 mit äußerer Kraft (der inhomogen Dgl.):
 Die Lösung ist eine Superposition der
 homogen und inhomogen Lösung, $x_{\text{hom}} + x_{\text{spez}}$:

$$x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{spez}} = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta) + \frac{F_0}{\gamma} \cos(\omega t - \gamma)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{"steady-state solution" (SSS)}}$

Frequenz des gedämpften

Systems: $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

d.h. $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}$

externe
Frequenz

Bitte beachten: die Lösung $x(t)$ hat
 noch 2 Konstanten A und δ , die
 mit den Anfangsbedingungen bestimmt
 werden müssen.

Ab jetzt sehen wir uns die 'SSS'-Lösung genauer an, Thema "Resonanzeffekte":

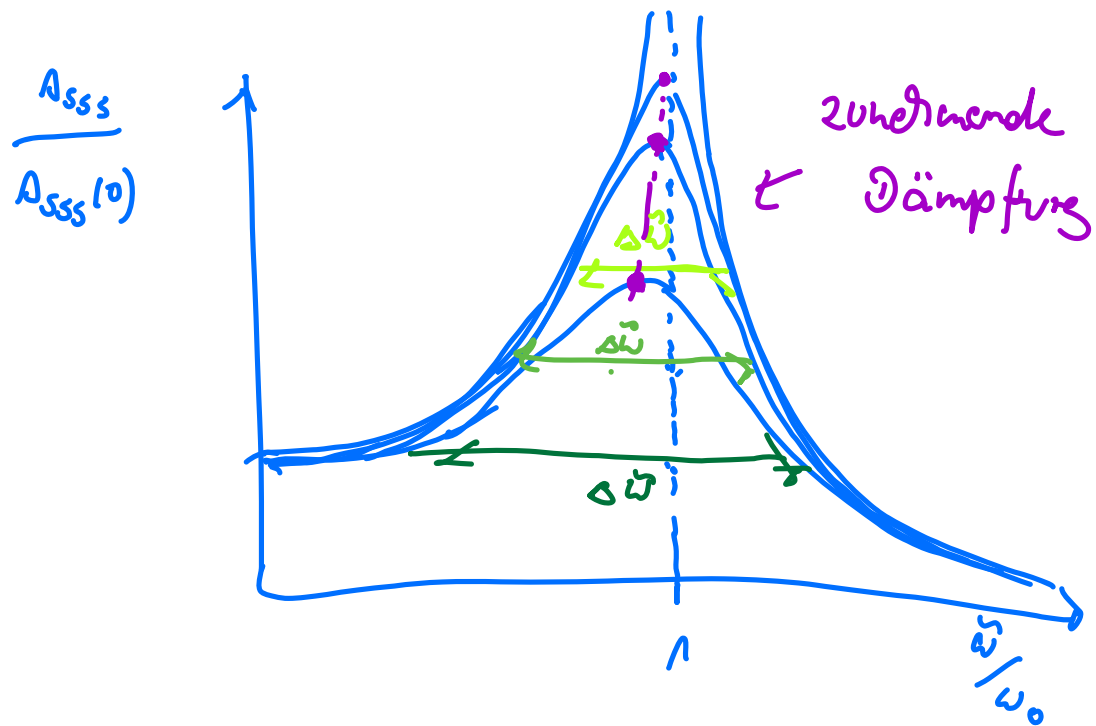
Bei welcher Frequenz $\tilde{\omega}$ wird die Amplitude der 'SSS' maximal?

$$\frac{d}{d\tilde{\omega}} \left[\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + b^2\tilde{\omega}^2}} \right] \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{1}{2} \frac{F_0[-2m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) + b^2]}{\sqrt{\dots}^3}$$

Zähler muß null sein: $\tilde{\omega}_{res}^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b^2}{2m^2}\right)$

• Falls Dämpfung null: $\tilde{\omega}_{res} = \omega_0$

• Falls Dämpfung nicht null, $b \neq 0$: $\omega_{res} < \omega_0$



Breite der Resonanzkurve:

Definition: $\Delta \tilde{\omega}$ bei Hälfte des Maximums $\frac{A_{res}^2}{2}$

$$\left\| \Delta \tilde{\omega} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\omega_0}{\omega_0 \gamma / b} = \frac{b}{m} \right\|$$

↑
Quality factor

Discussion der Phase γ in $x_{spez} = C \cos(\tilde{\omega}t - \gamma)$:

$$\tan \gamma = \frac{b \tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

Fälle :

i) Falls externe Frequenz $\tilde{\omega} = 0$:

$$\tilde{\omega}^2 = 0 \rightarrow \tan \gamma = 0 \rightarrow \gamma = 0$$

ii) Falls externe Frequenz $\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2$:

$$\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 \rightarrow \tan \gamma = \infty \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Phase um $\frac{\pi}{2}$ verschoben!

iii) Falls externe Frequenz $\tilde{\omega}^2 = \infty$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^2 = \infty \rightarrow \tan \gamma &= \left. \frac{b \tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right|_{\infty} = \\ &= \frac{b / \tilde{\omega}}{m \left(\frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} - 1 \right)} = - \frac{b / \tilde{\omega}}{m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} \right)} \end{aligned}$$

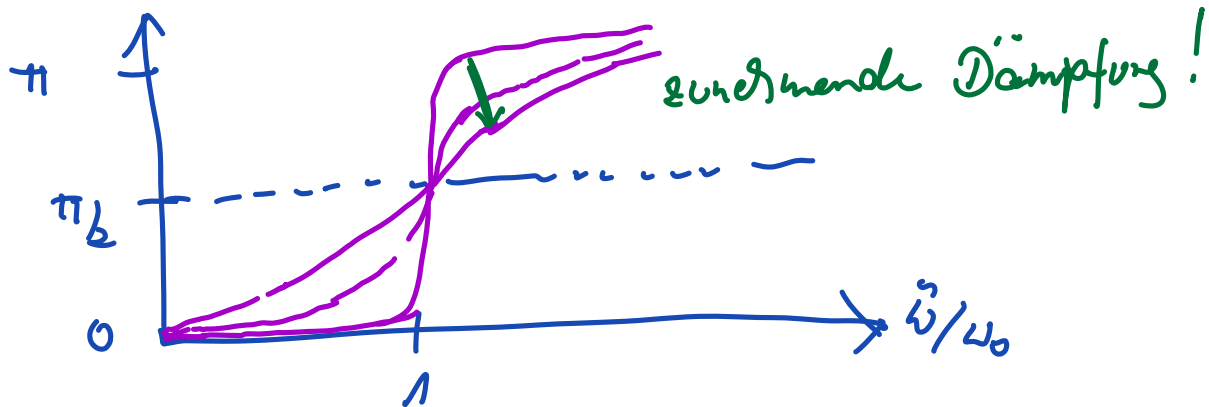
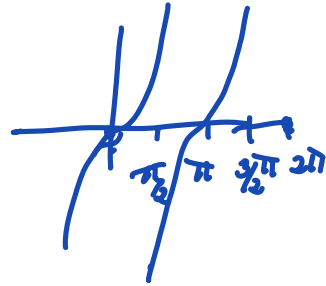
Taylorentwicklung für $\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1+x$

$$\Rightarrow - \frac{b / \tilde{\omega}}{m} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} \right)$$

$$\Rightarrow - \frac{b / \tilde{\omega}}{m} \cdot 1 \xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow \infty} = 0$$

D.h. die Phase $\gamma = \pi$

= "anti-phase"



Lit.: z.B. v. Walden, Praktikum der Physik, Kap. 7

Wir haben nur Schwingungen behandelt. Was bekommen wir, wenn sich Schwingungen im Raum ausbreiten?

$$\Rightarrow \underline{U_{\text{Wellen}}} = \text{Schwingung } f(x,t)$$

Zur Sommerzeit:

Wellen



(Tipler, Kap. 15)

Es gibt zwei Arten von Wellen:

i) Transversale Wellen: "Störung" ist senkrecht
zur Ausbreitungsrichtung

→ z.B. elektromagnetische Welle (Licht)

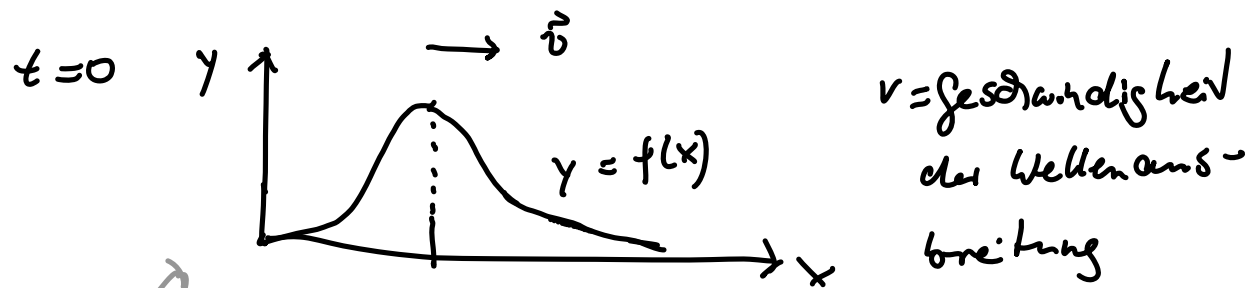
ii) Longitudinale Wellen: "Störung" ist parallel
zur Ausbreitungsrichtung

→ z.B. Schall

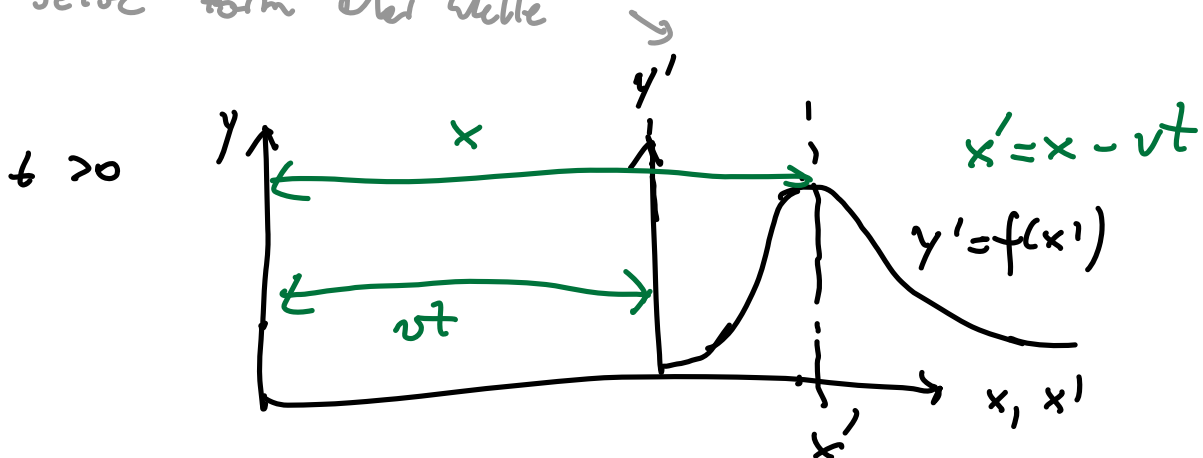
Herleitung der Wellengleichung

Wellen: Form zur Zeit $t=0$

⇒ durch $y = f(x)$ beschrieben



selbe Form der Welle



$$\Rightarrow f(x) = f(x - vt) \quad (\text{*)}$$

① a $y = y'$ (Form bleibt erhalten) :

$$\left| \begin{array}{ll} y = f(x - vt) & \text{Welle, die sich in } +x\text{-Richtung} \\ y = f(x + vt) & \text{Welle, die sich in } -x\text{-Richtung} \end{array} \right.$$

ausbreitet

Def.: $y = f(x \pm vt)$ Wellenfunktion