

$$b) \quad v_0^2 = \beta^2 : \quad \lambda = -\beta$$

→ Nur 1 reelle Lösung

Aber eine Dgl. 2. Ordnung braucht 2 Lösungen ...

→ wie erhält man die 2. Lösung?

I. "Modifizierten Ansatz" probieren:

$$x(t) = e^{\lambda t} \xrightarrow[\text{fiziert}]{\text{modifiziert}} x(t) = t e^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = t \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = t \lambda^2 e^{\lambda t} + 2 \lambda e^{\lambda t}$$

II. Einsetzen in Dgl.:

$$b \lambda^2 e^{\lambda t} + 2 \lambda e^{\lambda t} + 2 \beta (t \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}) + v_0^2 t e^{\lambda t} = 0$$

Fall b) Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

hat nur eine Lösung: $\lambda = -\beta$

Bildung der 2 unabhängigen Lösungen:

$$e^{\lambda t} = e^{-\beta t}$$

und

$$t e^{\lambda t} = t e^{-\beta t}$$

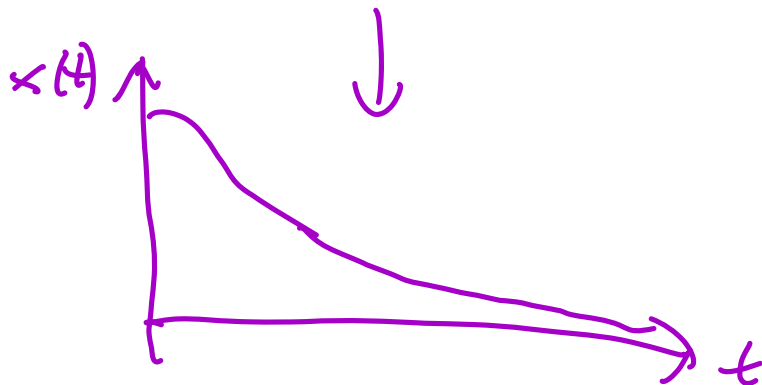
$\Rightarrow$ Allg. Lösung ist Linearkombination:

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 + A_2 t]$$

Wieder 2 Konstanten!

$\Rightarrow$ keine Schwingung, geht gegen
0 für $t \rightarrow \infty$

= "aperiodischer Grenzfall"



(Literatur: z.B. Tipler, Kap.
"gedämpfte Schwingungen")

c) $\omega_0^2 < \beta^2$:

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$$

→ keine Schwingung!

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(A_1 e^{+\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

= "Kriechfall"

Es gilt, wie vorher:

Die allg. Lösung setzt sich aus der
 Linearkombination beider Lösungen
 zusammen und hat 2 Konstanten A_1, A_2 ,
 die mit Anfangs- (Rand-)bedingungen
 bestimmt werden müssen.

Zusammenfassung: gedämpfte
Schwingungen

3 Fälle:

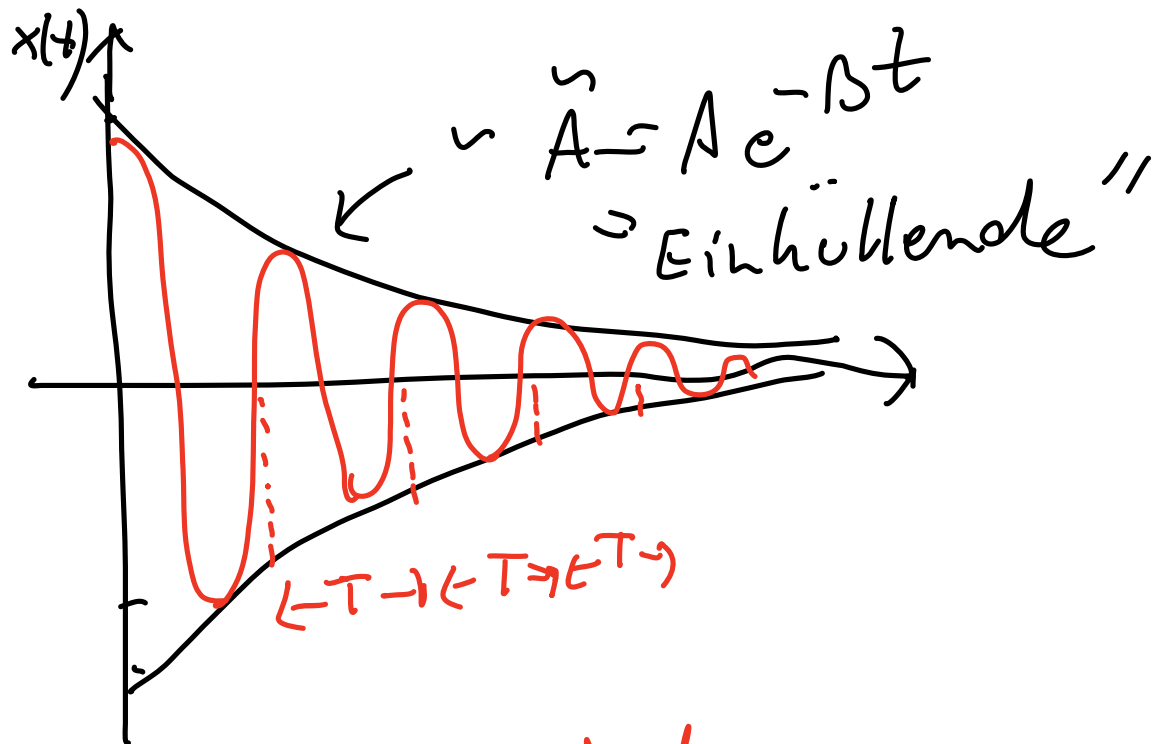
a) unterkritische Dämpfung
 $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_A A \cos(\omega t - \delta) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

zeitabhängige
Amplitude

$\Rightarrow$ Oszillationen "sterben" langsam
wegen Dämpfung



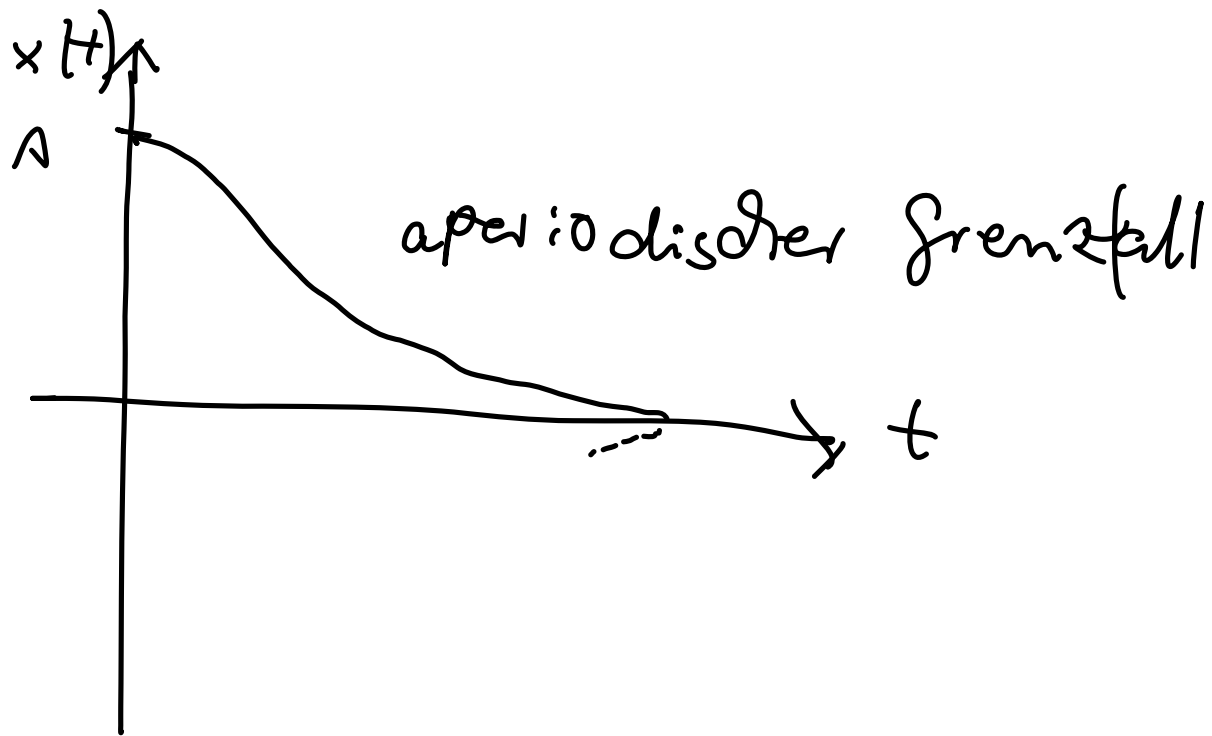
schwingfall

b) kritische Dämpfung $\omega_0^2 = \beta^2$

→ minimale Dämpfung, um
 gerade keine Schwingungen
 zu bekommen:

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 + A_2 t] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

geht so schnell wie möglich gegen Null!



c) überkritische Dämpfung $\omega_0^2 < \beta^2$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(A_1 e^{+\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

$t \rightarrow \infty$

$\rightarrow 0$

geht "langsam" gegen Null!



Energie einer gedämpften Schwingung

Falls keine Dämpfung:

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \propto A^2 \\ = \text{const.}$$

Nun im gedämpften Fall:

Dämpfung verrichtet Arbeit: verringert die Energie, die im System steckt!

Analog zu vorher (d.h. ohne

Dämpfung) lässt sich zeigen!

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A(t)^2$$

Amplitude,
zeitabhängig

Frequenz des ged. Systems

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 (e^{-\beta t})^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}_{E_0} e^{-2\beta t} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

E_0 Anfangs-energie

Zeitkonstante
 $\tau = \frac{m}{b}$

Q-Faktor:

gedämpfte Oszillationen werden durch den "Q" Faktor (quality factor) charakterisiert.

$$Q = \omega_0 \tau = \omega_0 \frac{m}{b}$$

d.h. $E = E_0 e^{-t \frac{\omega_0}{Q}}$

⇒ Q gibt Information über
den Bruchteil der Energie,
der pro Zyklus verloren
geht!

Erzwungene harmonische Schwingungen und Resonanzverhalten

Bisher:

a) freie Schwingung: $m\ddot{x} + kx = 0$ homogene Dgl.

Lösung: $x_{\text{hom}}(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$ mit $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

b) + Reibung: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ homogene Dgl.

Lösung: $x_{\text{hom}}(t) = \tilde{A}(t) \cos(\omega t + \delta) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta)$

c) + äußere Kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\tilde{\omega} t)$ ($\diamond$)
inhomogene Dgl.

Wie lautet nun die Lösung?

Vorüberlegung:

- Nach gewisser Zeit beherrscht die äußere Kraft die Schwingung, d.h. $x_{\text{ext}}(t) = x_{\text{speziell}}(t) \cos(\tilde{\omega} t)$
- Lösung der homogenen Dgl. löst ebenfalls ($\diamond$), da sie "null" ergibt, also nicht schadet!
→ muß daher dazu addiert werden:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{speziell}}(t)$$

→ am Beginn: Bewegung ist Superposition der gedämpften Schwingung mit der erzwungenen Schwingung

• Spezielles feature: **Resonanzeffekte**

Treten auf, falls Frequenz der externen Kraft

↪ Frequenz der gedämpften Schwingung

$$\rightarrow x_{\text{speziell}} (\tilde{\omega} \sim \omega \sim \omega_0) \rightarrow \infty$$

als Exp.funktion schreiben

Lösung von (D):

$$\text{Ansatz: } \underline{x}_{\text{speziell}} = C \cos(\tilde{\omega}t - \gamma) \stackrel{\downarrow}{=} \text{Re} \left[C e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)} \right]$$

↑
externe Kraft rennt immer voraus

Wieder 2 Konstanten C, γ (Dgl. 2. Ordnung!), aber haben sie wieder mit Anfangsbedingungen zu tun?

II. Einsetzen

$$\dot{x}_{\text{speziell}} = \text{Re} \left[C i \tilde{\omega} e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)} \right]$$

$$\ddot{x}_{\text{speziell}} = \text{Re} \left[-C \tilde{\omega}^2 e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)} \right]$$

$$m \operatorname{Re}[-C \tilde{\omega}^2 e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}] + b \operatorname{Re}[C i \tilde{\omega} e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}] + k \operatorname{Re}[C e^{i(\tilde{\omega}t - \gamma)}] = \operatorname{Re}[F_0 e^{i\tilde{\omega}t}]$$

$$\operatorname{Re}\{(-C \tilde{\omega}^2 m + C k) e^{i\tilde{\omega}t} e^{-i\gamma} + i b \tilde{\omega} C e^{i\tilde{\omega}t} e^{-i\gamma}\} = \operatorname{Re}(F_0 e^{i\tilde{\omega}t})$$

$$(-m \tilde{\omega}^2 + k)C [\cos \tilde{\omega}t \cos \gamma + \sin \tilde{\omega}t \sin \gamma] - b \tilde{\omega} C [-\cos \tilde{\omega}t \sin \gamma + \sin \tilde{\omega}t \cos \gamma] = F_0 \cos \tilde{\omega}t$$

ordnen nach 'sin' und 'cos'-Termen:

$$\cos \tilde{\omega}t \{(-m \tilde{\omega}^2 + k) \cos \gamma + b \tilde{\omega} \sin \gamma\} C + \sin \tilde{\omega}t \{(-m \tilde{\omega}^2 + k) \sin \gamma - b \tilde{\omega} \cos \gamma\} C = F_0 \cos \tilde{\omega}t$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten ($\forall t$) erfüllt sein muß, müssen die 'cos'- und 'sin'-Terme separat erfüllt sein!

$$\text{I. } \cancel{\cos \tilde{\omega}t} \{(-m \tilde{\omega}^2 + k) \cos \gamma + b \tilde{\omega} \sin \gamma\} C = F_0 \cancel{\cos \tilde{\omega}t}$$

$$\text{II. } \cancel{\sin \tilde{\omega}t} \{(-m \tilde{\omega}^2 + k) \sin \gamma - b \tilde{\omega} \cos \gamma\} C = 0$$

Aus II. erhalten wir:

$$(-m\tilde{\omega}^2 + R) \sin \gamma = b\tilde{\omega} \cos \gamma$$

$$\tan \gamma = \frac{b\tilde{\omega}}{-m\tilde{\omega}^2 + R} = \frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\text{d.h.} \quad \gamma = \arctan \left[\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right]$$

in Gleichung I. einsetzen:

$$[(-m\tilde{\omega}^2 + R) + b\tilde{\omega} \tan \gamma] \cos \gamma = \frac{F_0}{c}$$

NR: Was ist $\cos(\arctan[\gamma]) = ?$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos(\arctan[\gamma]) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan[\gamma])}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ I. ergibt:

$$\left[\underbrace{(-m\tilde{\omega}^2 + k)}_{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} + b\tilde{\omega} \frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right] \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2}} = \frac{F_0}{C}$$

$$\left[1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2}} = \frac{F_0}{C m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2} = \frac{F_0}{C m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\Rightarrow C = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + b^2 \tilde{\omega}^2}}$$

d.h. alle Konstanten der speziellen Lösung der inhomogen Gleichung x_{speziell} , d.h. C und γ , sind vollständig festgelegt!

Zurück zur allgemeinen Lösung der Dgl.
 mit äußerer Kraft (der inhomogen Dgl.):
 Die Lösung ist eine Superposition der
 homogen und inhomogen Lösung, $x_{\text{hom}} + x_{\text{spez}}$:

$$x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{spez}} = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta) + \frac{F_0}{\gamma} \cos(\omega t - \gamma)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{"steady-state solution" (SSS)}}$

Frequenz des gedämpften

Systems: $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

d.h. $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}$

externe
Frequenz

Bitte beachten: die Lösung $x(t)$ hat
 noch 2 Konstanten A und δ , die
 mit den Anfangsbedingungen bestimmt
 werden müssen.

$\Rightarrow$ I. ergibt:

$$\left[\underbrace{(-m\tilde{\omega}^2 + k)}_{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} + b\tilde{\omega} \frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right] \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2}} = \frac{F_0}{C}$$

$$\left[1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2}} = \frac{F_0}{C m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b\tilde{\omega}}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \right)^2} = \frac{F_0}{C m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

$$\Rightarrow C = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + b^2 \tilde{\omega}^2}}$$

d.h. alle Konstanten der speziellen Lösung der inhomogen Gleichung x_{speziell} , d.h. C und γ , sind vollständig festgelegt!

Ab jetzt sehen wir uns die 'SSS'-Lösung genauer an, Thema "Resonanzeffekte":

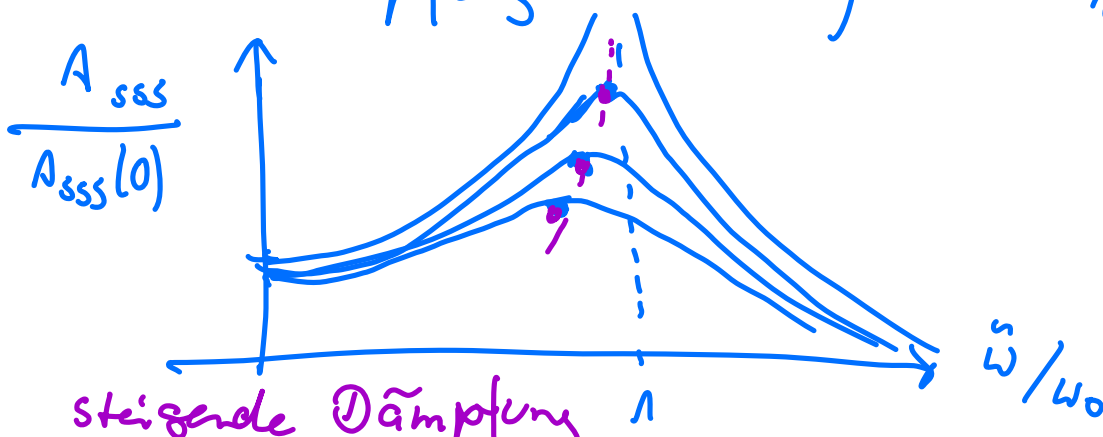
Bei welcher Frequenz $\tilde{\omega}$ wird die Amplitude der 'SSS' maximal?

$$\frac{d}{d\tilde{\omega}} \left[\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + b^2\tilde{\omega}^2}} \right] \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{1}{2} \frac{F_0[-2m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) + b^2]}{\sqrt{\dots}^3}$$

Zähler muß null sein: $\tilde{\omega}_{res}^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b^2}{2m^2}\right)$

• Falls Dämpfung null: $\tilde{\omega}_{res} = \omega_0$

• Falls Dämpfung nicht null, $b \neq 0$: $\omega_{res} < \omega_0$



1. *Introduction*