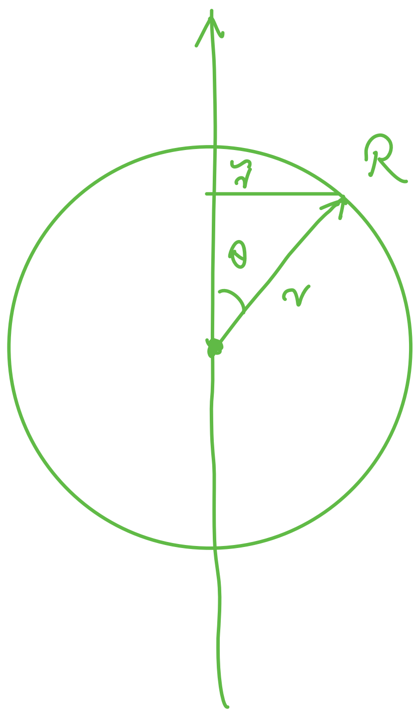
Trägheitsmoment einer gefüllten Kugel mit Achse durch Mittelpunkt!



$$M = \int \rho \, dV$$

$$\overset{\text{homogen}}{=} \rho \int dV$$

Zurück zum Physikal. Pendel:

Bgl.: $-MgL\sin\phi = I\ddot{\phi}$

(vergl. Feder $\quad -kx = m\ddot{x}$)

$\Rightarrow$ Analog zum Fall des math. Pendels: Bewegung ist näherungsweise eine einfache harmonische Schwingung, falls die Auslenkung klein ist, d.h. $\sin\phi \approx \phi$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\phi} = -\frac{MgL}{I}\phi$$

Ansatz wie vorher:

$\phi = e^{\lambda t}$ $\qquad \ddot{\phi} = \ldots$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{mgl}{I}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{mgl}{I}} = \pm i\sqrt{\frac{mgl}{I}} = \pm i\omega$$

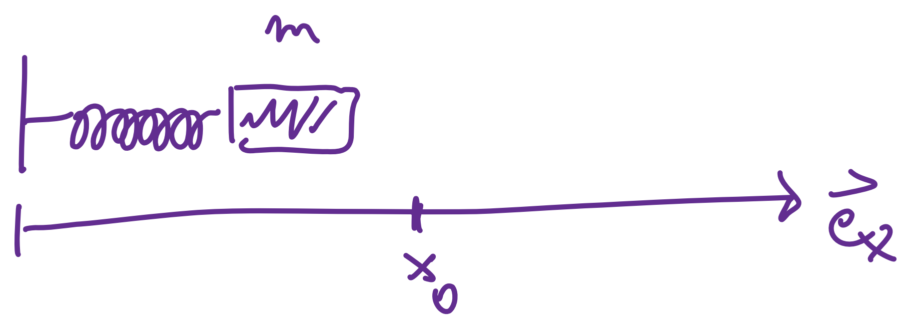
Eigenfrequenz

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Periode

Gedämpfte harmonische Schwingung

Reibungskräfte spielen in der Praxis eine wichtige Rolle, sie wirken der Bewegung jeweils entgegen (hier $\parallel \vec{e}_x$):



$$\vec{F}_R = -b\,\dot{x}\,\vec{e}_x$$

lineare Dämpfung

(Lauf durchs Wasser → ⊖ im Ansatz)

Bgl.: $m\ddot{x} = -b\dot{x} - Rx$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Rx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{R}{m}x = 0$$

Frequenz im ungedämpften Fall: nennen wir ab jetzt ω_0^2

Führe Dämpfungskonstante ein:

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

I. Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

II. Einsetzen:

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + 2\beta\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0^2 \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

→ 2 Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= A_1 e^{(-\beta + \Gamma)t} + A_2 e^{(-\beta - \Gamma)t}$$

$$= \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{Dämpfung}} \left[A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} \right] \quad (*)$$

Dämpfung, d.h. $x(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$

2 Konstanten mit Anfangsbeding. bestimmen

(*) diskutieren:

welche Fälle sind möglich?

a) $\omega_0^2 > \beta^2$: Radikand wird negativ

$\rightarrow$ Schwingung

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 e^{\sqrt{-(\omega_0^2-\beta^2)}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{-(\omega_0^2-\beta^2)}\,t}\right]$$

$$= e^{-\beta t}\left[A_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t} + A_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t}\right]$$

$$= e^{-\beta t}\left[A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right]$$

Euler Formel

$$= \underbrace{e^{-\beta t} A}_{\hat{A}} \cos(\omega t + \delta)$$

$\hat{A}$ zeitabhängige Amplitude

Konstanten:

$\beta = \frac{b}{2m}$ Dämpfungskonstante

aber

A_1, A_2 (oder A, δ) sind Konstanten
der Dgl. 2 Ordnung, durch
Anfangs(Rand-)bedingungen
zu bestimmen!

b) $\omega_0^2 = \beta^2$: $\lambda = -\beta$

→ Nur 1 reelle Lösung

Aber eine Dgl. 2. Ordnung braucht 2 Lösungen ...

→ wie erhält man die 2. Lösung?

I. "Modifizierten Ansatz" probieren:

$$x(t) = e^{\lambda t} \xrightarrow[\text{fiziert}]{\text{modi-}} x(t) = t\,e^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = t\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = t\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t}$$

II. Einsetzen in Dgl.:

$$t\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + 2\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + 2\beta\left(t\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + \cancel{e^{\lambda t}}\right) + \omega_0^2 t \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$t\underbrace{\left[\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2\right]}_{\text{identisch zu } (\oint)}+2\underbrace{\left[\lambda+\beta\right]}_{}=0$$

identisch zu ($\oint$)
→ wird durch
$\lambda=-\beta$ gelöst

ebenfalls
erfüllt durch
$\lambda=-\beta$ ✓

D.h. wir haben nach wie vor nur ein λ als Lösung, $\lambda=-\beta$, aber 2 unabhängige Lösungen:

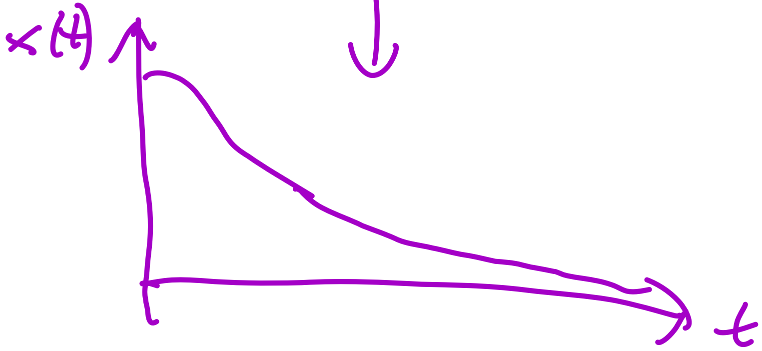
$$e^{\lambda t}=e^{-\beta t} \quad \text{und} \quad te^{\lambda t}=te^{-\beta t}$$

⇒ Die allgemeine Lösung setzt sich aus der Linearkombination zusammen:

$$x(t)=e^{-\beta t}\left[A_1+A_2 t\right]$$

$\Rightarrow$ keine Schwingung, geht gegen 0 für $t \to \infty$

„aperiodische Grenzfall"



(Literatur: z. B. Tipler, Kap. „gedämpfte Schwingungen")

c) $\omega_0^2 < \beta^2$:

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$$

$\to$ keine Schwingung!

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

„Kriechfall", aber – wie vorher – ist Linearkombination der zwei unabhängigen Lösungen und hat 2 Konstanten, die mit Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen!

Zusammenfassung: gedämpfte Schwingungen

3 Fälle:

a) unterkritische Dämpfung

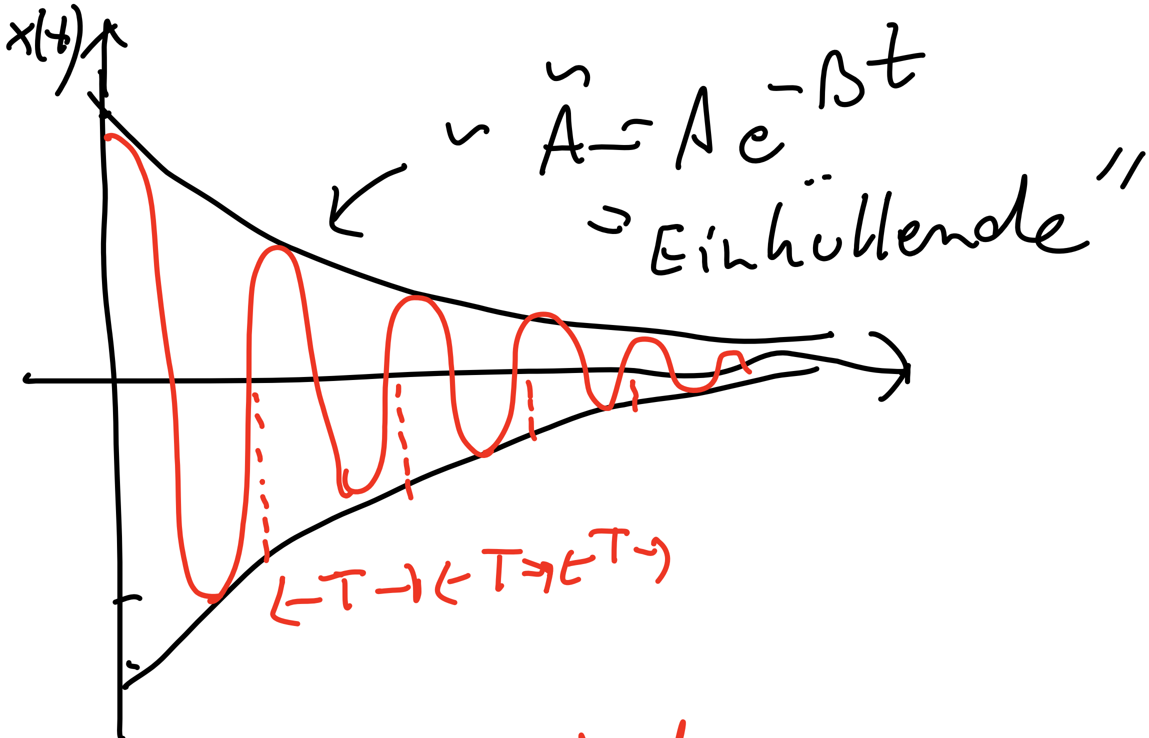
$$\omega_0^2 - \beta^2 > 0$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\beta t} A}_{\tilde{A}} \cos(\omega t - \delta) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$\tilde{A}$ zeitabhängige Amplitude

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$\Rightarrow$ Oszillationen "sterben" langsam wegen Dämpfung



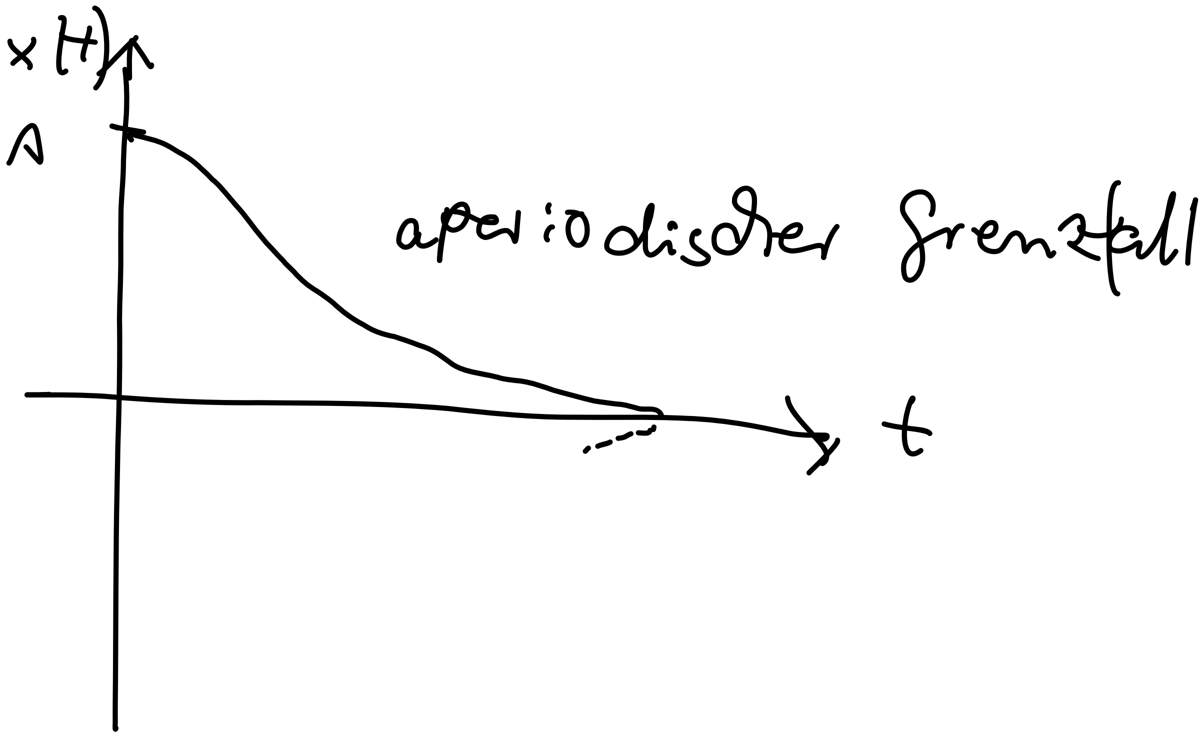
Schwingfall

b) kritische Dämpfung $\omega_0^2 = \beta^2$

$\rightarrow$ minimale Dämpfung, um gerade keine Schwingungen zu bekommen:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 + A_2 t\right] \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

geht schnell so möglich gegen Null!



c) überkritische Dämpfung $\omega_0^2 < \beta^2$

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

$t \to \infty$

$\to \quad 0$

geht „langsam" gegen Null!

„Kriechfall"

= Gleichgewicht erst für $t \to \infty$ erreicht.