Die Taylor'sche Reihe

$$\boxed{f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x-x_0)^{\nu}}$$

Den Fall $x_0 = 0$ nennt man auch „Mac Laurin'sche Reihe".

Bsp.: $f(x) = \sin x \quad f' = \cos x \quad f'' = -\sin x \quad f''' = -\cos x$

Wähle $x_0 = 0$: $\quad \underbrace{f'(x_0) = 1}_{= (-1)^0} \quad f''(x_0) = 0 \quad \underbrace{f'''(x_0) = -1}_{= (-1)^1}$

$\Rightarrow$ nur <u>ungerade</u> Ableitungen bleiben übrig

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(2m+1)}(x_0 = 0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_n$$

$$= \dots = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_n,$$

wobei $R_n = \dfrac{f^{(2n+1)}(\vartheta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$$= \frac{\overbrace{\pm\cos(\vartheta x)}^{|\cos\vartheta x| \leq 1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Test: wie verhält sich $\dfrac{x^l}{l!}$?

Bsp.: $x=2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^4}{4!}\Big|_{x=2} &= \frac{16}{24} \\ \frac{x^5}{5!}\Big|_{x=2} &= \frac{32}{120} \\ \frac{x^6}{6!}\Big|_{x=2} &= \frac{64}{720} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim n\to\infty \Rightarrow 0$$

D.h. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$$= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

kleine Winkelnäherung

Taylor Reihe für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ um $x_0 = 0$; $f^{(0)}(x_0) = 1$

$$f'(x)\Big|_{x_0=0} = (-1)\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x_0=0} = (-1)$$

$$f''(x)\Big|_{x_0=0} = (-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3}\Big|_{x_0=0} = 2$$

$$f'''(x)\Big|_{x_0=0} = (-1)(-2)(-3)\frac{1}{(1+x)^4}\Big|_{x_0=0} = -6$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1 - \frac{x}{1!} + 2\frac{x^2}{2!} - 6\frac{x^3}{3!}$$

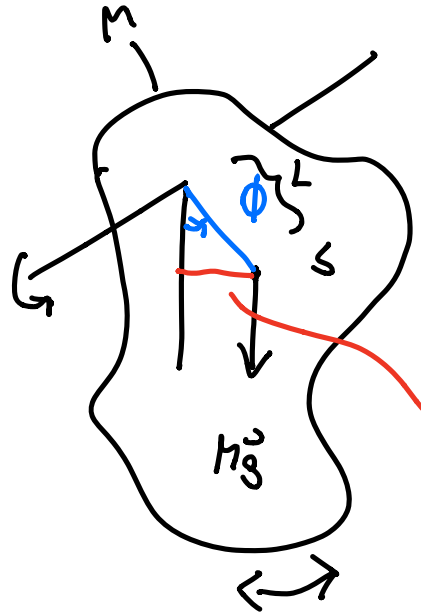
$$= 1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots + (-1)^n x^3$$

Deshalb nicht vergessen!

$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x$ in 1. Ordnung in x !

Das physikalische Pendel

Physikalisches Pendel = fester Körper, rotiert um eine horizontale Achse, die <u>nicht</u> durch den Schwerpunkt läuft.



Drehmoment des Schwerpunktes

$$-MgL\sin\phi = D$$

$\Rightarrow$ Da Drehbewegung:

2. Newton'sches Gesetz auf Rotation anwenden!

$$\vec{D} = I \cdot \vec{\alpha}$$

$\vec{\alpha}$ ← Winkelbeschleunigung hier $\ddot{\phi}$

= „Beschleunigung"

$\vec{D}$: Drehmoment = „Kraft"

I: Trägheitsmoment = „Masse"

bei rotierender Bewegung

Einschub:

Trägheitsmoment: $I = \int r^2 \, dm$

Wie berechnen wir $\int dm$?

$\Rightarrow$ a) $\int \sigma \, dA$ oder b) $\int \rho \, dV$

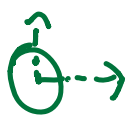
σ: Flächendichte, dA: Fläche, ρ: Dichte, dV: Volumen

a) Flächenintegrale

kartesische KO: $\int_0^a \int_0^b dx \, dy = a \cdot b = A_{\square}$

Polarkoordinaten: $\int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\varphi = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R$

$= \pi R^2 = A_{\circ}$



b) Volumenintegrale

kartesische KO: $\int_0^c \int_0^b \int_0^a dx \, dy \, dz = a \, b \, c = V_{\square}$

Kugelkoordinaten: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

$$= 2\pi \frac{R^3}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3} R^3 = V_{kugel}$$

Zylinder KO: $\int_0^{L}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r \, dr \, d\varphi \, dz = 2\pi \frac{R^2}{2} L$

$$= \pi R^2 L = V_{zylinder}$$

Vergleich: lineare Bewegung $\longleftrightarrow$ Kreis Bewegung

m	$\longleftrightarrow$	I
$\vec{v}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{\omega}$
$\vec{p}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{L}$
$\vec{p} = m\vec{v}$		$\vec{L} = I\vec{\omega}$

Zurück zum Physikal. Pendel:

Bgl.: $-Mg L \sin\phi = I \ddot{\phi}$

(vergl. Feder $\quad -Kx = m\ddot{x}$)

$\Rightarrow$ Analog zum Fall des math. Pendels: Bewegung ist näherungsweise eine einfache harmonische Schwingung, falls die Auslenkung klein ist, d.h. $\sin\phi \approx \phi$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\phi} = -\frac{MgL}{I}\phi$$

Ansatz wie vorher:

$$\phi = e^{\lambda t} \qquad \ddot{\phi} = \ldots$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{mgl}{I}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{mgl}{I}} = \pm i\sqrt{\frac{mgl}{I}} = \pm i\omega$$

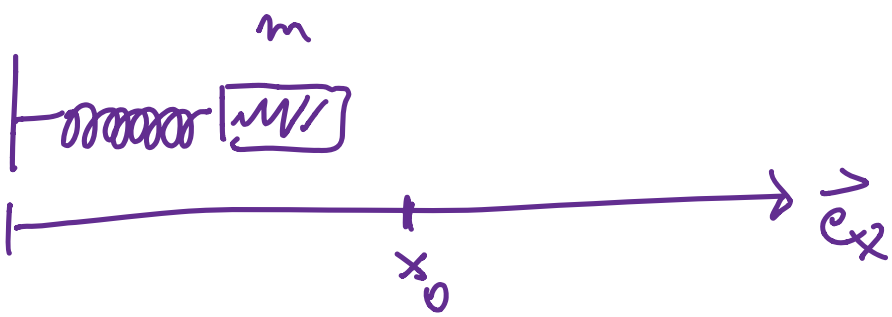
Eigenfrequenz

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Periode

Gedämpfte harmonische Schwingung

Reibungskräfte spielen in der Praxis eine wichtige Rolle. Sie wirken der Bewegung jeweils entgegen (hier $\parallel \vec{e}_x$):



$$\vec{F}_R = -b\,\dot{x}\,\vec{e}_x$$

(Lauf durchs Wasser → ⊖ im Ansatz)

↑

lineare Dämpfung

Bgl.: $m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Frequenz im ungedämpften Fall: nennen wir ab jetzt ω_0^2

Führe Dämpfungskonstante ein:

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

I. Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ $\qquad$ $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

II. Einsetzen:

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + 2\beta\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0^2 \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$\rightarrow$ 2 Lösungen:

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= A_1 e^{(-\beta + \sqrt{\ })t} + A_2 e^{(-\beta - \sqrt{\ })t}$$

$$= \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{Dämpfung, d.h. } x(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0} \left[A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} \right] \quad (*)$$

2 Konstanten mit Anfangsbeding. bestimmen