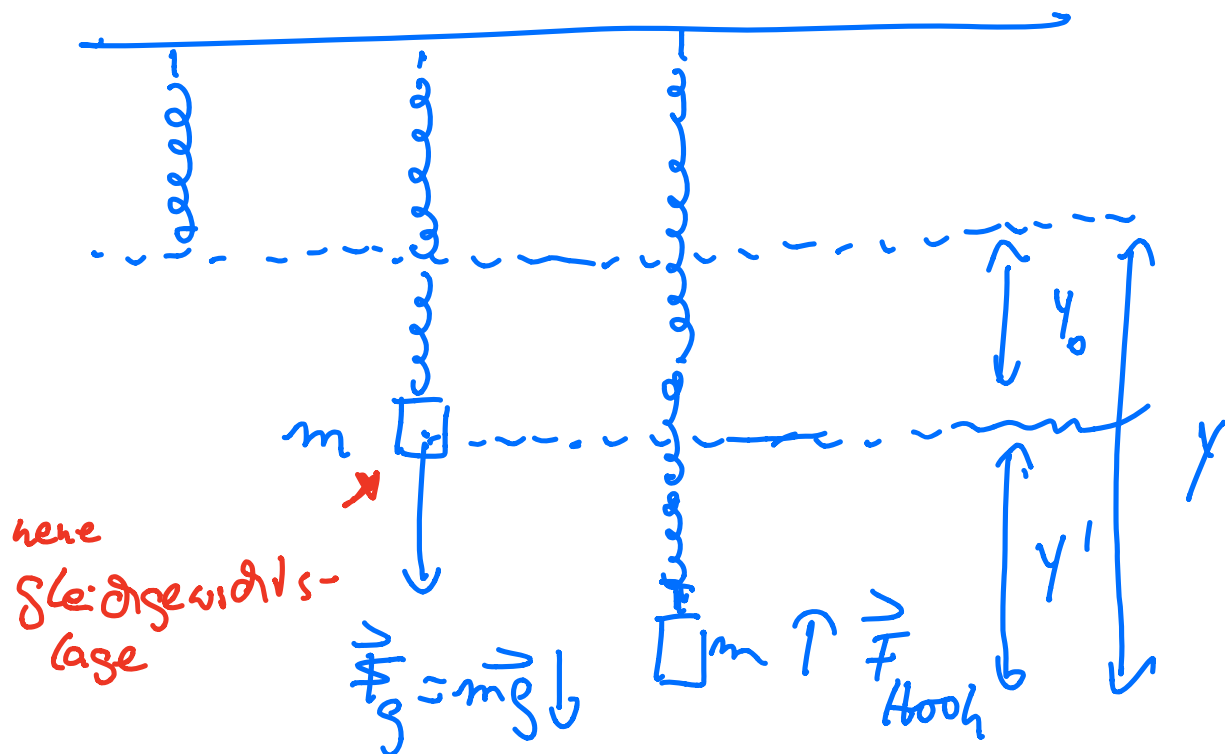


Vertikale Feder im Gravitationsfeld



Bgl.: $m a_y = m \ddot{y} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{Hook} + \vec{F}_g$
 $= -k y + m g$

$\Rightarrow$ Bgl: $m \ddot{y}(t) = -k y(t) + m g$

Trick: neue Variable $y' = y - y_0$

$y_0 = \text{const}$ und $\dot{y}_0 = 0$

In Dgl. einsetzen: $y = y' + y_0$
 $\dot{y} = \dot{y}'$, $\ddot{y} = \ddot{y}'$

$$\Rightarrow m \ddot{y} \stackrel{!}{=} -R(y + y_0) + mg$$

y_0 bestimmen: $|\vec{F}_{\text{Hook}}| = |\vec{F}_g|$

$$R y_0 = mg$$

$$\rightarrow y_0 = \frac{mg}{R}$$

einsetzen in Dgl.:

$$m \ddot{y} \stackrel{!}{=} -R y' - \cancel{R} \frac{mg}{\cancel{R}} + mg$$

$$\Rightarrow m \ddot{y}' \stackrel{!}{=} -R y' \quad \text{normal wie vorher}$$

...

⇒ Eigensfrequenz $\omega = \sqrt{R/m}$
wie im horizontalen Fall!

⇒ Effekt der Gravitationskraft:
bedeutet lediglich eine neue
Gleichgewichtsposition!

⇒ Alles wie vorher:

I. Ansatz $y = e^{\lambda t}$, $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

II. Einsetzen:

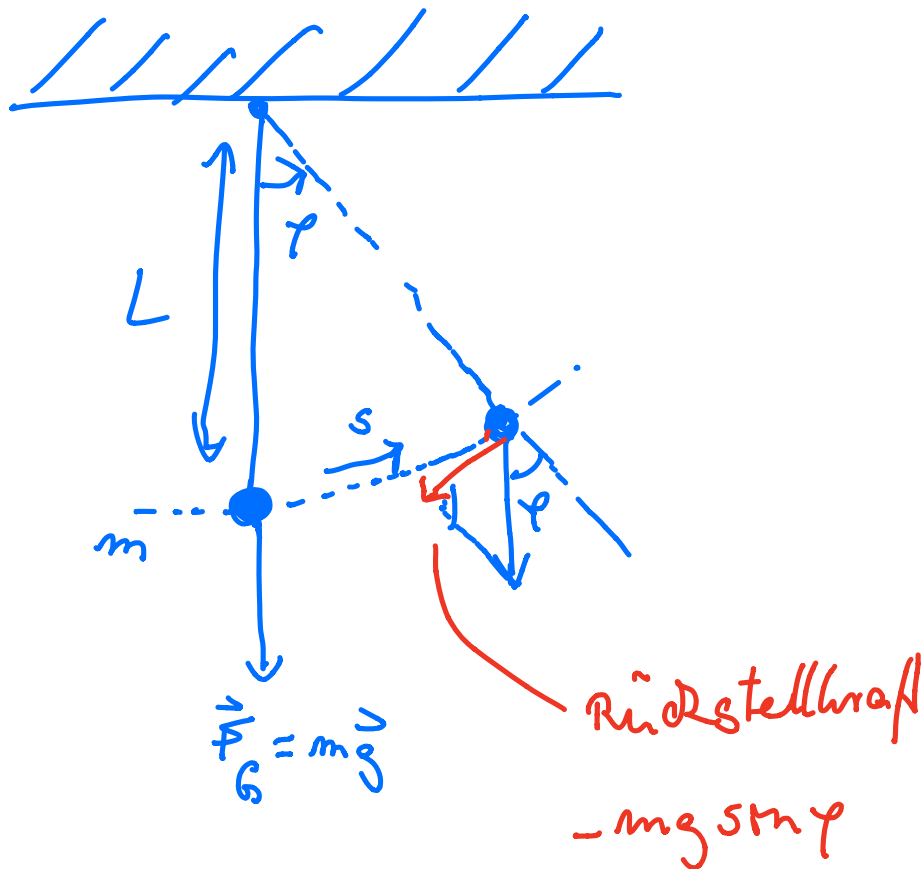
liefert Eigensfrequenzen $\omega = \pm \sqrt{R/m}$

III. Anfangsbedingungen einsetzen:

$$y(t=0) = \tilde{y}_0, \quad \dot{y}(t=0) = \dot{\tilde{y}}_0$$

Mathematisches Pendel (Tipler 14.3)

Def.: math. Pendel = Faden der Länge L mit Massekörper m und schwingt mit Periode T



Vorüberlegung:

- ebene Bewegung, d.h. 2 Dim. genügen zur Beschreibung, z.B. r und φ
- Da Pendellänge konstant ist (=Zwangsbedingung) reicht **1 Koordinate: s**

wie hängen s und φ zusammen?

$$\Rightarrow s = L \varphi$$

$$\text{Dgl.: } m\ddot{s} = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

$$\cancel{m} L \ddot{\varphi} = -\cancel{m} g \sin \varphi$$

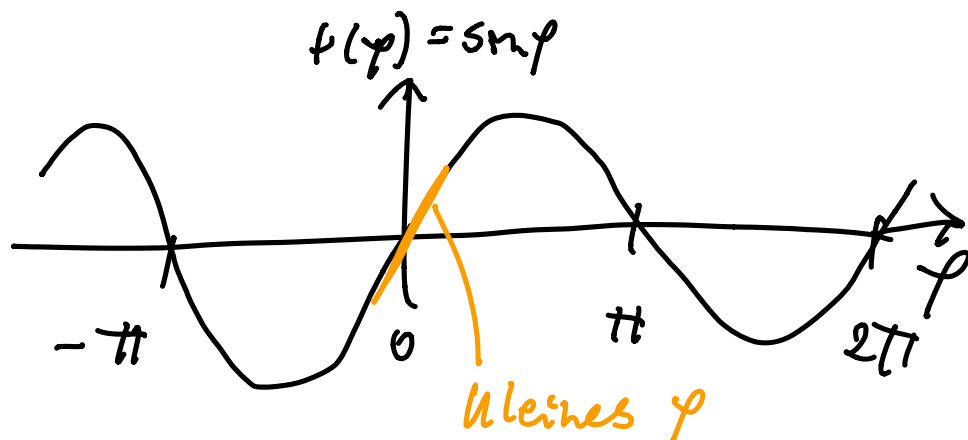
masse kürzt sich raus!

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \sin \varphi$$

wie soll man das lösen? Auf der rechten Seite steht $\sin \varphi$! $\rightarrow$ so nicht lösbar.

Vielleicht mit einer Näherung?

Schau wir mal:



⇒ Falls φ klein ist: $\|\sin \varphi \approx \varphi\|$
= "kleine Winkelnäherung"!

Einsetzen:

$$\|\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \varphi\|$$

D.h. wir lösen diese Bewegungsgleichung unter der Annahme, daß nur kleine Winkel auftreten!

Notiz: Diese Näherung machen wir immer (bis auf einmal in Theoret. Physik I, klass. Feldtheorie → dort rechnen wir es genauer und schauen wie gut unser linearer Ansatz $\sin \varphi \approx \varphi$ war... sehr gut, nämlich!)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \varphi$$

$$\text{Ansatz: } \varphi = e^{\lambda t} \quad \ddot{\varphi} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \lambda^2 = -\frac{g}{L}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{g}{L}} = \pm i \sqrt{\frac{g}{L}} = \pm i \omega$$

$$\rightarrow \varphi(t) = A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

Euler Formel

$$= \dots C \sin(\omega t + \delta)$$

Perioden daher:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (*)$$

Längeres L ergibt größere T

Anwendung: Experimentelle Bestimmung
von g mit $(*)$

$$\Rightarrow g = L \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Versuchsreihe (normalerweise im Hörsaal

$\rightarrow$ bitte jeder zu Hause ausprobieren):

Man nehme:

- 1 langer Faden
- 1 kleines kompaktes Gewicht (Avocado Kern)
- 1 Stoppuhr

- Avocado kern am Faden binden,
- schwingende Fadendlänge bis Kern-Mittel-
punkt messen
- Faden am Regal befestigen und
auslenken
- Meßreihe für T -Messungen von
jeweils 10 kompletten Schwingungen
erstellen
- T berechnen (Durchschnitt und durch
10 dividieren)

Bsp.: $L = 98 \text{ cm}$

$\overline{T} = 1.991 \text{ s}$

$\left. \begin{array}{l} L = 98 \text{ cm} \\ \overline{T} = 1.991 \text{ s} \end{array} \right\} g = 9.75 \text{ m/s}^2$

"Mittelwert"

Falls größerer Winkel φ : $\overline{T}_{>\varphi_0} = 1.995 \text{ s}$
noch größerer Winkel φ : $\overline{T}_{>\varphi_0} = 2.004 \text{ s}$ }

$\Rightarrow$ T nimmt zu, je größer der Auslenkungswinkel ist

$\Rightarrow$ immer kleinere, "schlechtere" Werte für g !

Welche Ursache kann das haben?

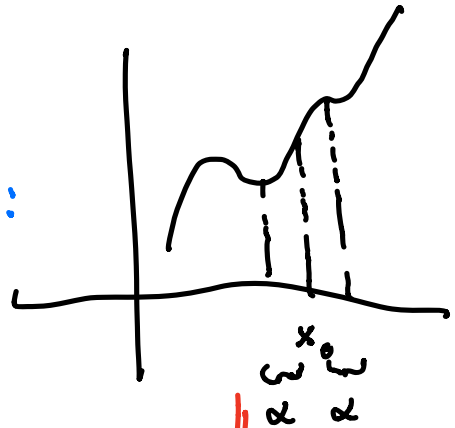
$\Rightarrow$ Winkelnäherung für kleine Winkel nicht mehr angemessen!

Woher kommt diese Näherung eigentlich, was steckt (mathematisch) dahinter?

Die Taylor'sche Reihe öko, 4.3.1

Eine Funktion f sei in $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, $\alpha > 0$
 $(n+1)$ -mal differenzierbar.

Dann gilt für $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$:



$$\left\| f(x) = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} (x - x_0)^r + R_n(x) \right\|$$

wobei $R_n(x)$ das Lagrange'sche Restglied
der **Taylorentwicklung** ist und gegeben
ist durch:

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

$\vartheta \in (0, 1)$

Falls gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, dann wird

die Funktion f durch die
Taylor'sche Reihe dargestellt:

$$\| f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x-x_0)^v \|$$

Den Fall $x_0 = 0$ nennt man auch
"Mac Laurin'sche Reihe".

$$\text{Bsp.: } f(x) = \sin x \quad f' = \cos x \quad f'' = -\sin x \quad f''' = -\cos x$$

$$\text{Wähle } x_0 = 0 : \quad f'(x_0) = 1 \quad f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) = -1$$

$\quad \quad \quad = (-1)^0 \quad \quad \quad = (-1)^1$

$\Rightarrow$ nur ungerade Ableitungen bleiben über

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m+1)}(x_0=0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_m$$

$$= \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_m,$$

$$\text{wobei } R_n = \frac{f^{(2n+1)}(\vartheta_x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \frac{\pm \cos(\vartheta_x)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$|\cos \vartheta_x| \leq 1$

Test: Wie verhält sich $\frac{x^k}{e!}$?

Bsp.: $x=2$

$$\frac{x^4}{4!} \Big|_{x=2} = \frac{16}{24}$$

$$\frac{x^5}{5!} \Big|_{x=2} = \frac{32}{120}$$

$$\frac{x^6}{6!} \Big|_{x=2} = \frac{64}{720}$$

} $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Rightarrow 0$

$$\text{D.h. } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{1!} x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5$$

↑
kleine Winkelnäherung

Taylor Reihe für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ um $x_0 = 0$: $f^{(0)}(x_0) = 1$

$$f'(x) \Big|_{x_0=0} = (-1) \frac{1}{(1+x)^2} \Big|_{x_0=0} = (-1)$$

$$f''(x) \Big|_{x_0=0} = (-1)(-2) \frac{1}{(1+x)^3} \Big|_{x_0=0} = 2$$

$$f^{(3)}(x) \Big|_{x_0=0} = (-1)(-2)(-3) \frac{1}{(1+x)^4} \Big|_{x_0=0} = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{x}{1!} + 2 \frac{x^2}{2!} - 6 \frac{x^3}{3!}$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots + (-1)^n x^n$$

Deshalb nicht vergessen!

$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ in 1. Ordnung in x !