

Energieinhalt einer harmonischen Schwingung

Potenitielle Energie: $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

einsetzen: $x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$

Gesamtenergie:

$$E_{\text{ges}} = T + V =$$

$$= \frac{m}{2} \left[x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t - 2 x_0 v_0 \sin \omega t \cos \omega t \right]$$

$$+ \frac{k}{2} \left[x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t + 2 x_0 \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t \right]$$

$$= \frac{1}{2} x_0^2 (m \omega^2 \sin^2 \omega t + k \cos^2 \omega t)$$

$$+ \frac{1}{2} v_0^2 \left(m \cos^2 \omega t + \frac{k}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right)$$

$$+ x_0 v_0 \sin \omega t \cos \omega t \left(\underbrace{\frac{k}{v} - m \omega}_{=0} \right)$$

$$\stackrel{\omega = \frac{R}{m}}{=} \frac{1}{2} x_0^2 \frac{k}{m} + \frac{1}{2} v_0^2 m = \frac{1}{2} k \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ Gesamtenergie ist
erhalten! ✓

Was ist die maximale Amplitude der
Schwingung?

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$\rightarrow$ einfachste Lösung: $x(t)$ formal umwandeln

$$\text{in } x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

immer noch 2 Konstanten!

$$= A \cos \omega t \cos \delta - A \sin \omega t \sin \delta$$

d.h. $x_0 \stackrel{!}{=} A \cos \delta$

$\frac{v_0}{\omega} \stackrel{!}{=} -A \sin \delta$

$$\rightarrow \tan \delta = -\frac{v_0}{x_0 \omega} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \delta}}{\cos \delta}$$

$$-\frac{v_0}{x_0 \omega} \cos \delta = \sqrt{1 - \cos^2 \delta} \quad |^2$$

$$\frac{v_0^2}{x_0^2 \omega^2} \cos^2 \delta = 1 - \cos^2 \delta$$

$$\cos^2 \delta \left[1 + \frac{v_0^2}{x_0^2 \omega^2} \right] = 1$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \delta &= \frac{1}{1 + \frac{v_0^2}{x_0^2 \omega^2}} \\ &= \frac{x_0^2 \omega^2}{x_0^2 \omega^2 + v_0^2} \end{aligned}$$

einsetzen?

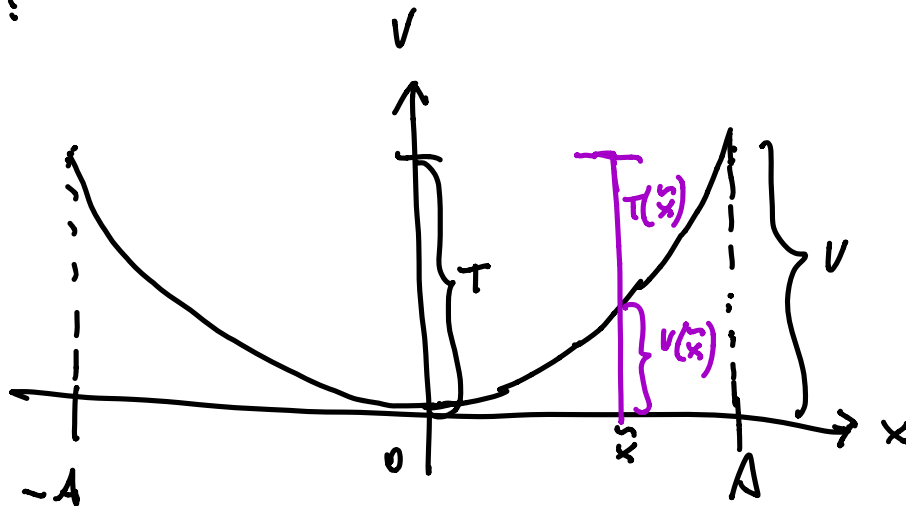
$$A^2 = \frac{x_0^2}{\cos^2 \delta} = \frac{x_0^2}{\cancel{x_0^2 \omega^2}} (x_0^2 \omega^2 + v_0^2) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

$\Rightarrow$ Maximale Amplitude der Schwingung ist

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Merke: Die Gesamtenergie bei einer einfachen harmonischen Schwingung ist proportional zum Quadrat der max. Amplitude und ist erhalten!

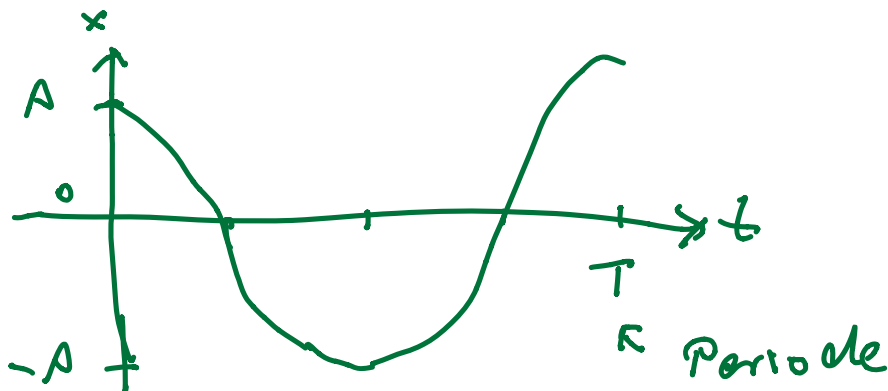
Skizze:



T, V ändern sich zeitlich, die Summe ist konstant.

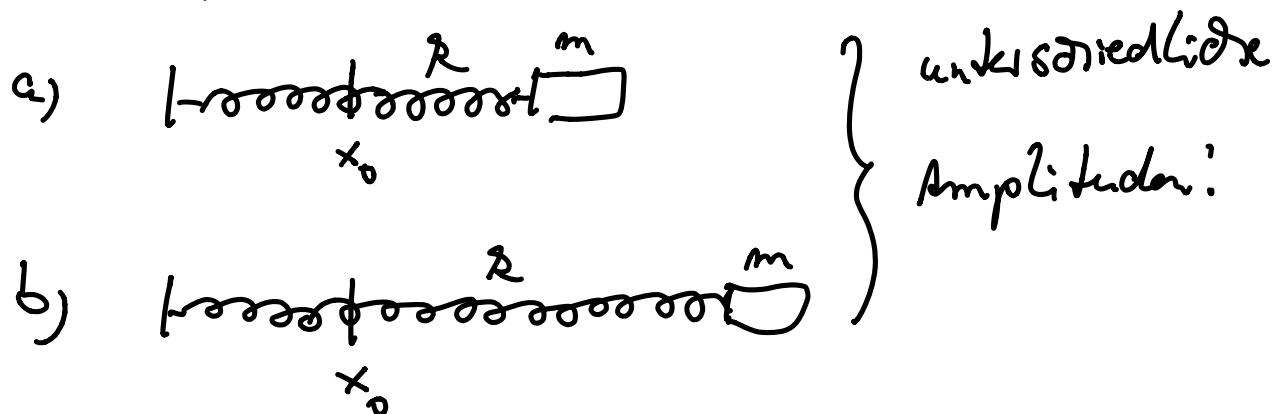
$\Rightarrow$ Was bedeutet das für $x(t), V(t), T(t)$ konkret?

Lassen sich Mittelwerte berechnen?



sowohl $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ als auch T sind bestimmt durch k, m , d.h. nur durch "Eigenschaften" des Systems.

Betrachte: $t=0$



Schwingungen mit gleicher Frequenz ω ,
d.h. f und T , sind unabhängig von der
Amplitude ("Auslenkung")!

Musik: Amplitude $\hat{=}$ Lautstärke!

zurück zur Berechnung von Mittelwerten:

$$x_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, A \cos \omega t$$

im folgenden:
 $\int_0^T \cos \omega t \, dt = 0$
(o.B.d.A.)

$$= \frac{A}{T\omega} [\sin \omega t]_0^T = \frac{A}{T\omega} [\underbrace{\sin(\omega T)}_{=0} - \sin 0] = 0$$

Potenentielle Energie:

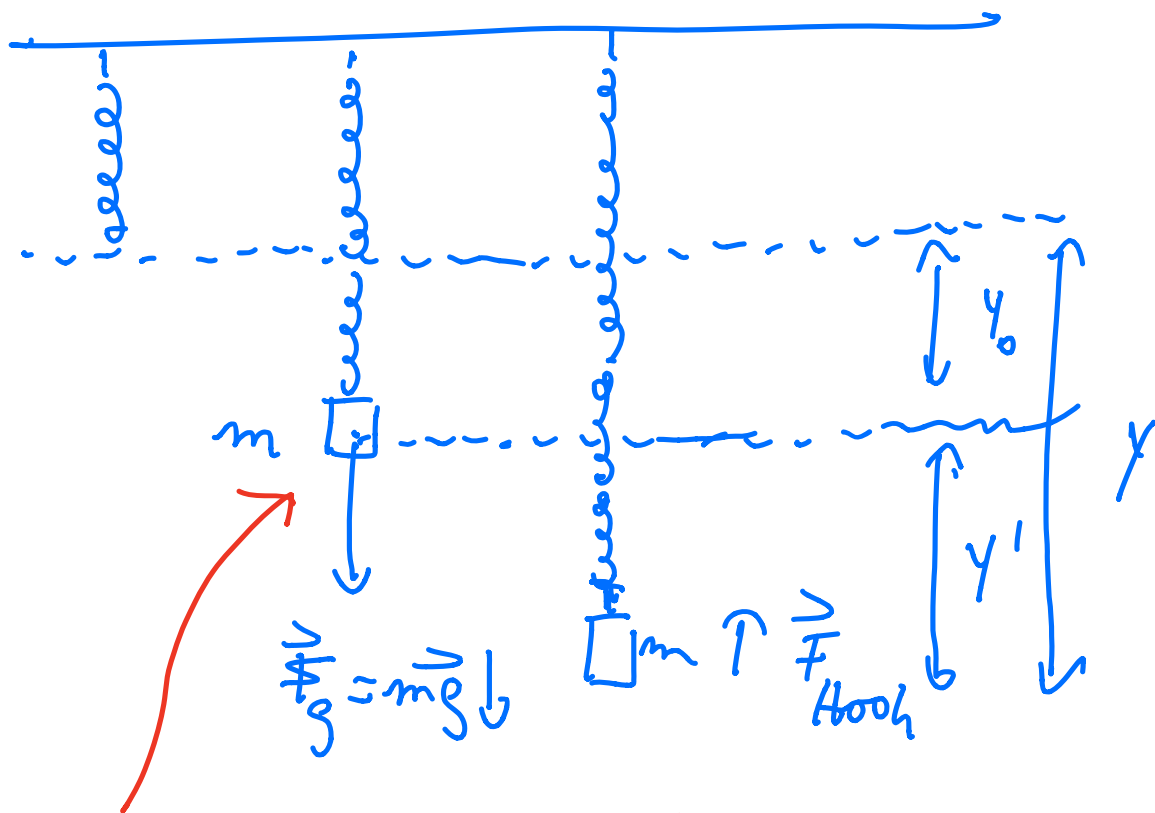
$$\begin{aligned} V_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{T} \frac{k A^2}{2} \int_0^T dt \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \\ &= \frac{k A^2}{4T} \left[t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T \\ &= \frac{k A^2}{4T} [T + 0] = \frac{k A^2}{4} = \frac{E_{ges}}{2} \quad // \end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T_{av} &= \frac{1}{T} \frac{m}{2} \int_0^T dt \dot{x}^2 = \frac{m}{T} \frac{1}{2} \int_0^T dt \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{m \omega^2 A^2}{2} \int_0^T \frac{1}{2} (\overset{(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)}{1 - \cos 2\omega t}) dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{m \omega^2 A^2}{2} \left[\frac{T}{2} \right] = \frac{m \omega^2 A^2}{4} = \frac{k A^2}{4} = \frac{1}{2} E_{ges} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Vertikale Feder im Gravitationsfeld

Mass an vertikaler Feder:



neue Gleichgewichtslage

Welche Kräfte wirken?

- Federkraft $\vec{F}_{Hooke} = -k y$ (wirkt nach oben)
- Gravitationskraft $\vec{F}_g$



Kraft zieht nach unten

Bewegungsgleichung! Diese beiden
Wirfeln dem 2. Newton'schen Gesetz
gleichsetzen.

$$m a_y = m \ddot{y} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{Hook}} + \vec{F}_g \\ = -k y + m g$$

$$\Rightarrow \text{Bgl: } m \ddot{y}(t) = -k y(t) + m g$$

Trick! neue Variable $y' = y - y_0$

$$y_0 = \text{const}$$

$$\dot{y}_0 = 0$$

In Dgl. einsetzen: $y = y' + y_0$
 $\dot{y} = \dot{y}'$, $\ddot{y} = \ddot{y}'$

$$\Rightarrow m \ddot{y} \stackrel{!}{=} -R(y + y_0) + mg$$

y_0 bestimmen: $|\vec{F}_{\text{Hook}}| = |\vec{F}_g|$

$$R y_0 = mg$$

$$\rightarrow y_0 = \frac{mg}{R}$$

einsetzen in Dgl.:

$$m \ddot{y} \stackrel{!}{=} -R y' - \cancel{R} \frac{mg}{\cancel{R}} + mg$$

$$\Rightarrow m \ddot{y}' \stackrel{!}{=} -R y' \quad \text{normal wie vorher}$$

...

⇒ Eigensfrequenz $\omega = \sqrt{R/m}$
wie im horizontalen Fall!

⇒ Effekt der Gravitationskraft:
bedeutet lediglich eine neue
Gleichgewichtsposition!

⇒ Alles wie vorher:

I. Ansatz $y = e^{\lambda t}$, $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

II. Einsetzen:

liefert Eigensfrequenzen $\omega = \pm \sqrt{R/m}$

III. Anfangsbedingungen einsetzen:

$$y(t=0) = \tilde{y}_0, \quad \dot{y}(t=0) = \dot{\tilde{y}}_0$$

Definition:

(Merke)

Periodenzeit $T :=$ Zeit, um eine komplette
Schwingung zu durchlaufen
($\hat{=}$ "Zyklus")

$$[T] = s$$

Frequenz $f := \frac{1}{T} =$ Anzahl der Zyklen
pro Sekunden

$$[f] = s^{-1}$$

Beziehung zwischen ω und T ?

$$\begin{aligned} x(t) = x(t+T) &\Leftrightarrow A \cos(\omega t) \stackrel{!}{=} A \cos(\omega t + T) \\ &= A \cos \omega t \underbrace{\cos \omega T}_{\stackrel{!}{=} 1} \\ &\quad - A \sin \omega t \underbrace{\sin \omega T}_{\stackrel{!}{=} 0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad \text{i.e.} \quad \omega = 2\pi f \quad ||$$

$$\text{d.h.} \quad x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi\right)$$