

• sind die Lösungen von solchen Dgl. 2. Ordnung immer Schwingungen?

→ Nein!

• Gibt es ein allgemeines Rezept, welchen Ansatz man wählt?

→ Ja: den Exponentialansatz wählen, der Rest ergibt sich.

Nochmal zurück: Lösen wir

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

II. Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

(Konstanten fügen wir später dazu, wir brauchen 2, nicht vergessen!)

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

II. Ansatz einsetzen

$$m \lambda^2 e^{\lambda t} + R e^{\lambda t} = 0$$

$$|| m \lambda^2 + R = 0 ||$$

Charakteristisches Polynom

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{R}{m}$$

$$\lambda_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{R}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{R}{m}}$$

2 Lösungen Frequenz ω

"Schwingung"

"Eigenfrequenz"
des Systems

Allg. Lösung ist Linearkombination:

$$x(t) = C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

Benutze: Euler'sche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &\stackrel{\downarrow}{=} C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ &\quad + C_2 (\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t \end{aligned}$$

III. Anfangsbedingungen einsetzen

$$(z.B.) \quad x(t=0) = x_0 \quad \text{und}$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

Häufig: $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ Aufpassen!

$\Rightarrow$ Gleichungssystem lautet:

$$x(t=0) = C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} x_0 \rightarrow C_1 = x_0 - C_2$$

$$\dot{x}(t=0) = [-(C_1 + C_2)\omega \sin(\omega t) + i(C_1 - C_2)\omega \cos(\omega t)] \Big|_{t=0} \stackrel{!}{=} v_0$$

d.h. $i(C_1 - C_2)\omega = v_0$

$$i(x_0 - 2C_2)\omega = v_0$$

$$-2iC_2\omega = v_0 - i x_0 \omega$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{v_0 - i x_0 \omega}{-2i\omega} = \frac{v_0}{2\omega} i + \frac{x_0}{2}$$

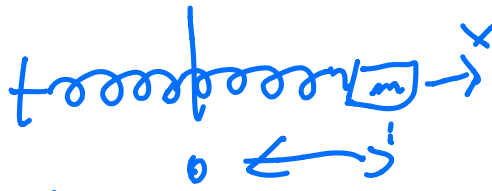
$$\Rightarrow C_1 = x_0 - C_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega} i$$

d.h. Lösung lautet:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + i\left(-\frac{v_0}{\omega} i\right) \sin(\omega t) \\ &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Diese Lösung ist rein reell!

$\Rightarrow$ Muß so sein!

Diskussion der Lösung: 

a) Falls m am Beginn an Position $x_0 = 0$ und in Ruhe, $v_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ passiert nichts! ✓

b) Falls m am Beginn an Position $x_0 = 0$, aber in Bewegung, $v_0 \neq 0 \Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

$\rightarrow$ am Ort $x(t = \frac{\pi}{2\omega})$ zur Zeit $t = \frac{\pi}{2\omega}$ hat die Schwingung Maximum v_0/ω .

Wie groß ist die Geschwindigkeit dort?

$$\dot{x}(t) = \frac{v_0}{\omega} \omega \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(t = \frac{\pi}{2\omega}) = v_0 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$\Rightarrow$ Körper ist in Ruhe, ist im Umkehrpunkt! ✓

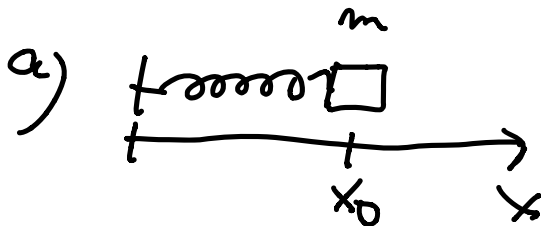
c) Falls m am Beginn an Position $x(t=0) = x_{\max}$, aber in Ruhe: $v_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_{\max} \cos(\omega t)$ ✓

$\Rightarrow$ Am Ort $x(t = \frac{2\pi}{\omega}, 0)$ hat die Schwingung ein Maximum $x_{\max}$. ✓

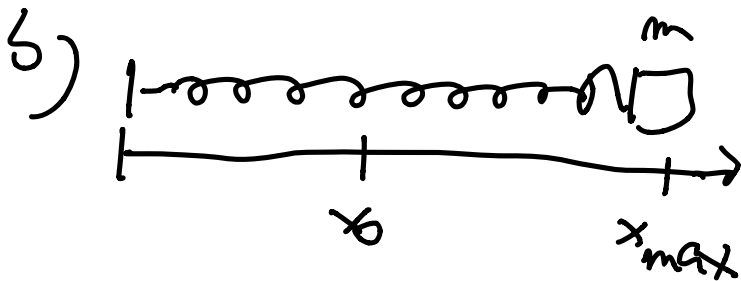
Merke:

- Exponentialansatz löst die Dgl.
- Charakt. Polynom entscheidet über Art der Lösung: Schwingung oder exp. Lösung
- Bestimmung der Konstanten mittel Anfangs- (Rand-) Bedingung liefert endgültige Lösung!

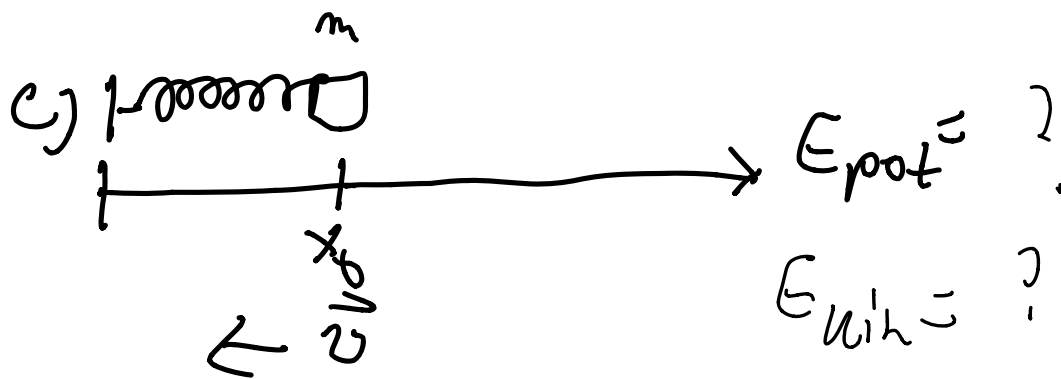
Energiegehalt einer harm. Schwingung

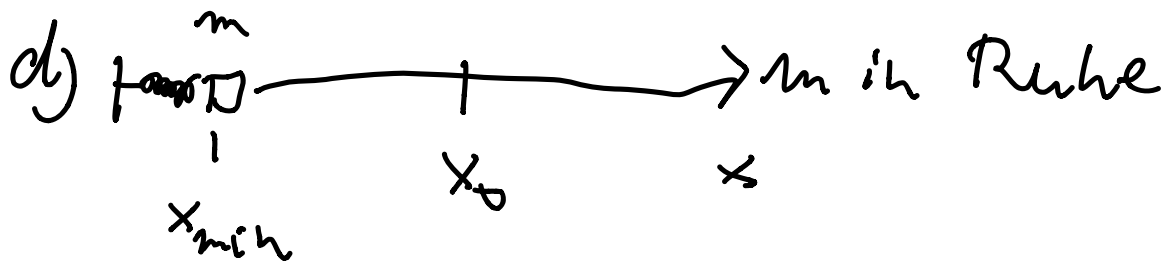


$\rightarrow E_{kin} = ? \quad E_{pot} = ?$



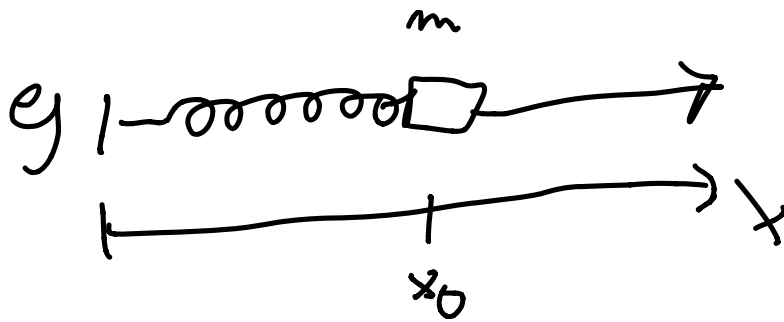
$\rightarrow E_{kin} = ? , E_{pot} = ?$





$\rightarrow \vec{v}$

$\rightarrow E_{kin} = ? , E_{pot} = ?$



$\rightarrow E_{kin} = ?$

$E_{pot} = ?$

Wie berechnen wir diese Energie?

Die einzig wirkende Kraft ist die Federkraft, d.h. $\vec{F}_{\text{Hooke}}$ ist konservativ

$$\vec{F}_{\text{Hooke}} = - \vec{\nabla} V = - \frac{dV(x)}{dx}$$

Dgl. 1. Ordnung!

→ Lösung mittels Variablentrennung.

$$dV(x) = - \vec{F}_{\text{Hooke}} d\vec{x} \quad | \int$$

$$V(x) = - \int \vec{F}_{\text{Hooke}} d\vec{x} = - \int (-kx) dx$$

$$= \frac{1}{2} kx^2 + C$$

Wähle: $V(x=0) = 0$

$$\rightarrow V(x=0) = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

d.h. $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$ Potentielle Energie

einsetzen: $x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

fehlt noch die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

einsetzen: $\dot{x}(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$

Gesamtenenergie:

$$E_{\text{ges}} = T + V =$$

$$= \frac{m}{2} \left[x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t - 2 x_0 v_0 \sin \omega t \cos \omega t \right]$$

$$+ \frac{k}{2} \left[x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t + 2 x_0 \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t \right]$$

$$= \frac{1}{2} x_0^2 (m \omega^2 \sin^2 \omega t + k \cos^2 \omega t)$$

$$+ \frac{1}{2} v_0^2 \left(m \cos^2 \omega t + \frac{k}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right)$$

$$+ x_0 v_0 \sin \omega t \cos \omega t \left(\frac{k}{\omega} - m \omega \right)$$

$$\stackrel{\omega = \frac{k}{m}}{=} \frac{1}{2} x_0^2 k + \frac{1}{2} v_0^2 m = \text{const}$$

$\Rightarrow$ Gesamtenergie ist
erhalten! ✓

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$