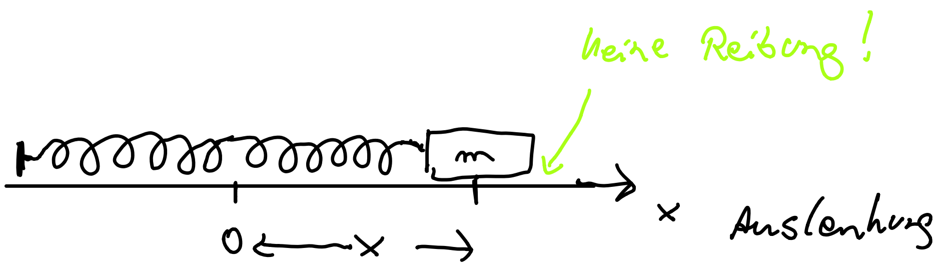
3. Schwingungen

3.1 Einfache harmonische Schwingungen

Schwingungen entstehen, wenn ein System aus dem Gleichgewicht ausgelenkt (d.h. gestört) wird.

Horizontale Federn:



a) Alle wirkenden Kräfte auflisten: hier nur Federkraft
≈ "Hooke'sches Gesetz"

$$\vec{F} = F_x = -kx$$

$\uparrow$
Federkonstante
Eigenschaft der Feder

b) Bewegungsgleichung mit Hilfe des 2. Newton'schen Gesetzes herleiten:

$$F_x = m a_x = m \dot{v}_x = m \ddot{x}$$

D.h. $\boxed{m\ddot{x} = -kx}$ Differentialgleichung (Dgl.) 2. Ordnung

Ziel: $x(t)$ bestimmen ... ???

Wie haben wir es früher gemacht?

$v = \frac{s}{t}$ d.h. $v = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$ Dgl. 1. Ordnung

$$v\,dt = dr \qquad | \int$$

$\Rightarrow$ "Trennung der Variablen", siehe Anfang

Dieses Verfahren funktioniert nun nicht mehr, da wir eine Dgl. 2. Ordnung lösen müssen!

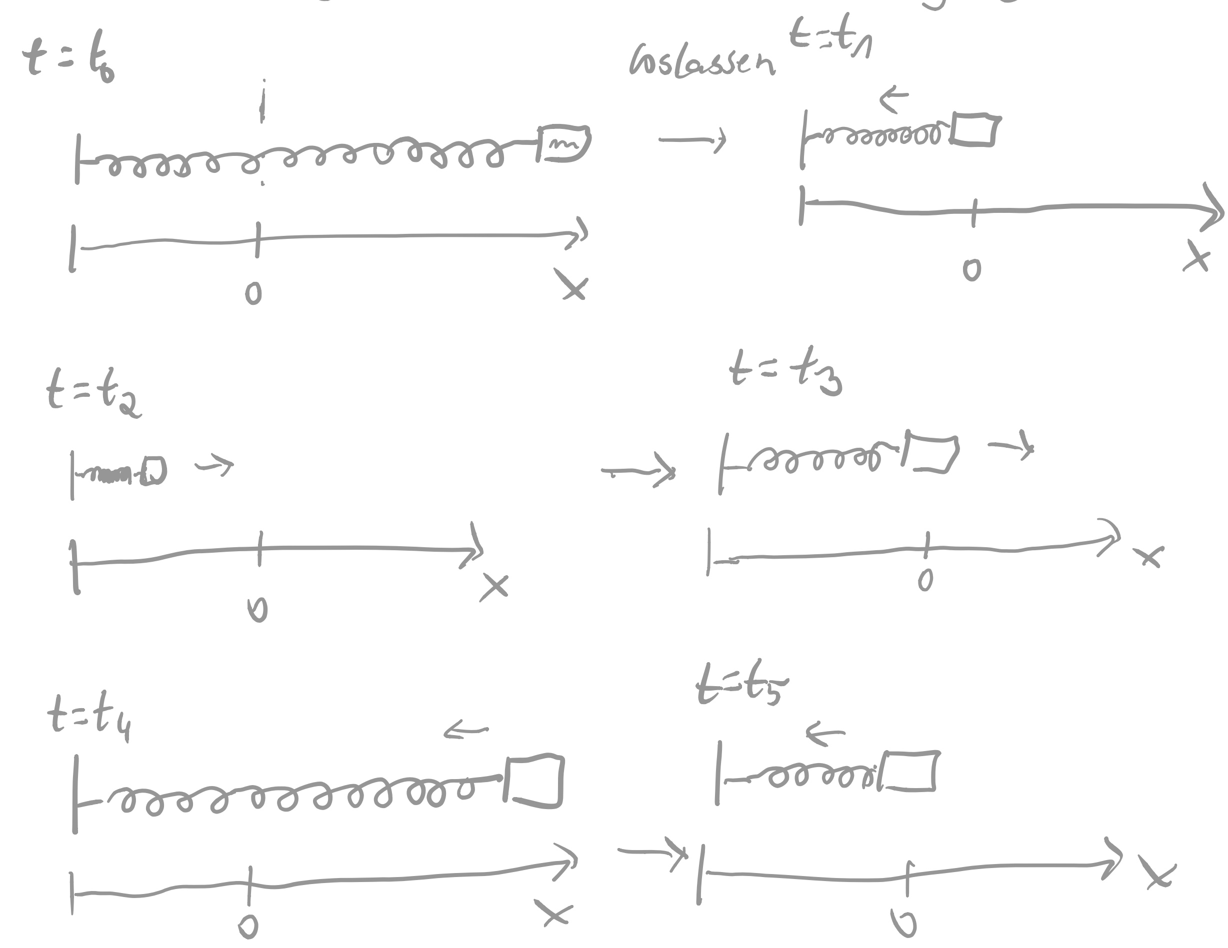
Was nun? $\rightarrow$ Siri? ↯

$\Rightarrow$ Im Prinzip: immer $x(t)$ erraten!

Mathematische Verfahren für das "Raten":

1. Schritt: Ansatz machen und einsetzen

Vorüberlegung: wie sieht die Bewegung aus?



D.h. wir brauchen eine Funktion, die periodisch immer wieder den Nullpunkt durchschwingt ..... cosinus, sinus?

Ansatz:

$\Rightarrow \quad x(t) \sim \cos(\omega t)$

Winkelgeschwindigkeit

Nochmal erinnern an frühere Beispiele mit der Dgl. 1. Ordnung $\vec{v}\,dt = d\vec{r}$:

→ Bei der Integration ergibt sich eine Integrationskonstante, $\vec{r}(0)$.

⇒ Bei einer Dgl. 2. Ordnung müssen daher 2 Integrationskonstanten eingearbeitet werden

Vollständiger Ansatz: $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$

Amplitude der Schwingung

Phase

2. Schritt: Ansatz in Dgl. einsetzen

"probieren, unter welchen Bedingungen, der Ansatz die Dgl. lösen kann":

Dgl.: $$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (*)$$

Ansatz: $$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

in $(*)$:

$$-m\cancel{A}\omega^2\cancel{\cos(\omega t + \delta)} + k\cancel{A}\cancel{\cos(\omega t + \delta)} \overset{!}{=} 0$$

kürzen: $$-m\omega^2 + k \overset{!}{=} 0$$

D.h. $$\omega^2 = k/m$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ansatz löst unsere Gleichung (*) für

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wichtig: Die Winkelgeschwindigkeit ω hängt nur von den Eigenschaften des System ab, d.h. von k (Federkonstante) und von m (Masse des Körpers)!

Was machen wir mit den zwei Lösungen, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und $\omega_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}$?

→ sind beide erlaubt!

D.h. die allgemeine Lösung setzt sich aus einer Linearkombination beider Lösungen zusammen.

$$x = \underline{A_1}\cos(\underline{\omega_1}t + \delta_1) + \underline{A_2}\cos(\omega_2 t + \underline{\delta_2})$$

4 Konstanten?

$$\stackrel{\omega_1 \stackrel{!}{=} -\omega_2}{=} A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2\cos(-\omega_1 t + \delta_2)$$

$$= A_1\left[\cos\omega_1 t \cos\delta_1 - \sin\omega_1 t \sin\delta_1\right]$$

$$+ A_2\left[\cos\omega_1 t \cos\delta_2 + \sin\omega_1 t \sin\delta_2\right]$$

$$= \underbrace{(A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2)}_{c_1}\cos\omega_1 t$$

$$+ \underbrace{(A_2\sin\delta_2 - A_1\sin\delta_1)}_{c_2}\sin\omega_1 t$$

$$= c_1\cos\omega_1 t + c_2\sin\omega_1 t \quad , \omega_1 = +\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\Rightarrow$ 2 Konstanten c_1, c_2 !

3. Schritt: Konstanten bestimmen!

Wie? → mittels Anfangsbedingungen,
siehe früher $\vec{r}(t=0) = \vec{r}(0) = \vec{r}_0$

D.h. im Prinzip brauchen wir nun
zwei Anfangsbedingungen!

a) $x(t=0) = x_0$ und
b) $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$

→ mit a) und b) die zwei Konstanten c_1 und c_2 bestimmen.

⇒ Dgl. vollständig gelöst!

Wichtig! Zur vollständigen Lösung einer Dgl. sind die Rand-(Anfangs)bedingungen erforderlich!

Zusammenfassung:

Folgende Schritte lösen eine Dgl.:

I. Ansatz aufstellen

II. Ansatz einsetzen

III. Mit Rand-(Anfangs-) Bedingungen sind die Konstanten zu bestimmen!

Dgl. 1. Ordnung: 1 Konstante

Dgl. 2. Ordnung: 2 Konstanten

Merke: Die Rand-(Anfangs-) Bedingungen entscheiden, ob es Lösungen gibt!

- Sind die Lösungen von solchen Dgl. 2. Ordnung immer Schwingungen?

→ Nein!

- Gibt es ein allgemeines Rezept, welchen Ansatz man wählt?

→ Ja: den Exponentialansatz wählen, der Rest ergibt sich.

Nochmal zurück: Lösen wir

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

I. Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

(Konstanten fügen wir später dazu, wir brauchen 2, nicht vergessen!)

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

II. Ansatz einsetzen

$$m\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + k \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$\| \; m\lambda^2 + k = 0 \; \|$$

Charakteristisches Polynom

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm\, i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\text{Frequenz } \omega}$$

2 Lösungen

„Schwingung"

„Eigenfrequenz" des Systems

Allg. Lösung ist Linearkombination:

$$x(t) = c_1 e^{+i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Benutze: Euler'sche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\Rightarrow x(t) \overset{\downarrow}{=} c_1 (\cos\omega t + i \sin\omega t) + c_2 (\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t))$$

$$= (c_1 + c_2) \cos\omega t + i (c_1 - c_2) \sin\omega t$$

III. Anfangsbedingungen einsetzen

(z.B.) $x(t=0) = x_0$ und

$\dot{x}(t=0) = v_0$

<u>Häufig</u>: $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ Aufpassen!

$\Rightarrow$ Gleichungssystem lautet:

$$x(t=0) = C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} x_0 \quad \rightarrow C_1 = x_0 - C_2$$

$$\dot{x}(t=0) = \Big[-(c_1+c_2)\,\omega \sin(\omega t) + i(c_1-c_2)\,\omega\cos(\omega t)\Big]\Big|_{t=0} \stackrel{!}{=} v_0$$

d.h. $i(c_1 - c_2)\,\omega = v_0$

$$i(x_0 - 2c_2)\,\omega = v_0$$

$$-2i c_2 \omega = v_0 - i x_0 \omega$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{v_0 - i x_0 \omega}{-2i\omega} = \frac{v_0}{2\omega} i + \frac{x_0}{2}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = x_0 - c_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega} i$$

d.h. Lösung lautet:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + i\left(-\frac{v_0}{\omega} i\right)\sin(\omega t)$$
$$= x_0\cos(\omega t) + v_0/\omega \,\sin(\omega t)$$