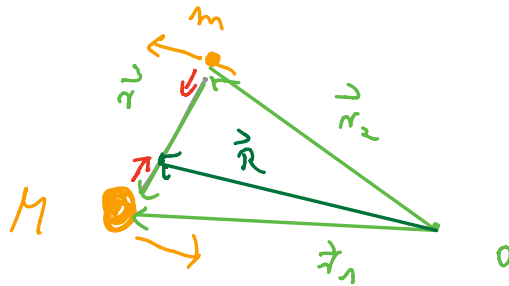


Zwei-Körper-System: Kepler Bewegung



Es gilt: a) Energieerhaltung (da konservative Kraft)

b) Drehimpulserhaltung (da Zentralkraft)
 → ebene Bewegung ← konstante

Wegen Drehimpulserhaltung ist $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}$ bekannt!

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2}_{\text{kin. Energie der radialen Bewegung}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2}}_{\text{Zentrifugal-potential}} + \underbrace{V(r)}_{\text{Wechselwirkungspotential hier: Gravitationspotential}} = \text{const}$$

kin. Energie
der radialen
Bewegung

Zentrifugal-
potential Wechselwirkungspotential
hier: Gravitationspotential

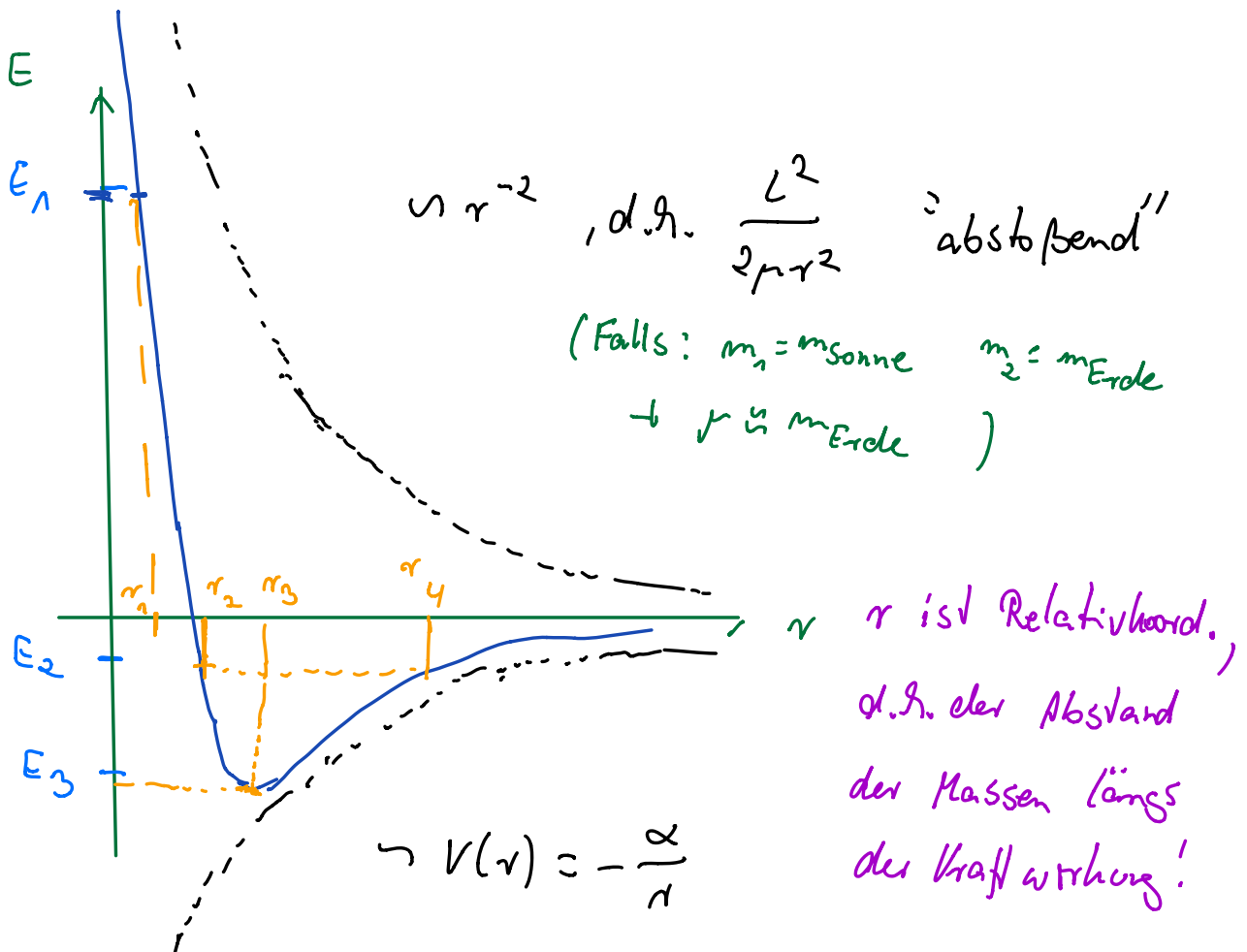
$$\left\| \begin{aligned} U(r) &= \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \\ \text{effektives Potential} \end{aligned} \right\|$$

Bewegung der reduzierten Masse μ im effektiven Potential U :

$$\left\| E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}(t)^2 + U(r) \right\|$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\mu \dot{r}^2(t)}{2} = E - U(r)} \Rightarrow \text{radiale Bewegung des Systems!}$$

Wie sieht das Potential $U(r)$ aus?



Wie sieht nun die Bewegung für die drei Energien E_1, E_2 und E_3 aus?

a) $E = E_1 > 0$: Für die gesamte Bewegung gilt $r \geq r_1$
→ Körper läuft auf Kraftzentrum zu mit der Geschwindigkeit

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{r}(E - U(r))}$$

$\dot{r}(r_1) = 0$: kehrt um und läuft ins ∞ → infinite Bahn

b) $E_3 \leq E \leq E_2$: Bahn läuft zwischen den zwei Umkehrpunkten r_2 und r_4 hin und her.
Ist eine finite Bewegung, aber noch unklar, ob offen oder geschlossen
→ häufig "Ellipsen"

c) $E = E_3$: $E = E_3 = -\mu \frac{\alpha^2}{2} L^2$: kinetische Energie der Radialbewegung verschwindet
 Bahn bildet Kreis mit $r_0 = \text{const} = \frac{L^2}{\alpha \mu}$
 $\Rightarrow$ "geschlossene" Bewegung

Nebenrechnung:

$$U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial r} = -\cancel{2} \frac{L^2}{\cancel{2}\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{L^2}{\alpha \mu}$$

$$U\left(\frac{L^2}{\alpha \mu}\right) = \frac{L^2 \alpha^2 \mu^2}{2\mu L^4} - \frac{\alpha \alpha \mu}{L^2} = \frac{\alpha^2 \mu}{2L^2} - \frac{\alpha^2 \mu}{L^2} = -\frac{\alpha^2 \mu}{2L^2}$$

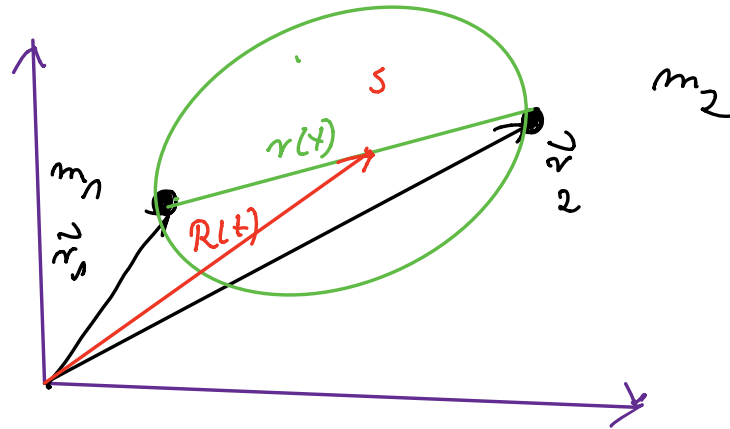
Beispiele:

a) Sonne - Planet ($\mu \approx$ kleinere Masse): Planet

kreist entweder ellipsenförmig oder fast kreisförmig um die Sonne

b) Doppelsterne ($\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$): radiale Bewegung der Sterne
 bewegt sich ellipsenförmig (kreisförmig) um

den Schwerpunkt der Sterne



Zusammenfassung:

- Bewegung solcher Zwei-Körper Systeme kann immer in Bewegung des Schwerpunktes $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ und des Relativvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ zerlegt werden.
- Ohne äußere Kräfte führt der Schwerpunkt $\vec{R}$ eine gleichförmige (d.h. $\ddot{\vec{R}} = 0$) durch.

- Die Relativbewegung zweier Massen m_1 und m_2 entspricht der Bewegung einer reduzierten Masse $\mu \hat{=}$ äquivalent zum Eilteilsystem!
- Bei Zentralkräften gilt Drehimpulserhaltung und die Bewegung findet in einer Ebene statt.

Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2}}$$

Integration $\int$:

$$dr = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2}} dt$$

$$\int_{t_0}^t dt = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \left(E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right)^{-1/2} dr$$

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \dots$$

$$\Rightarrow t(r)$$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion liefert $r(t)$.

Fehl noch die Bahnkurve $r(\varphi)$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t) = \frac{L}{mr^2}$$

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt = \frac{L}{mr^2(t)} \underbrace{\frac{dt}{dr}}_{dr} dr \quad \text{Trick!}$$

$$= \frac{L}{mr^2(t)} \frac{1}{\dot{r}} dr \quad | \int$$

setze i ein und dann auf beide Seiten integrieren:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \pm \int_{r_0}^r \frac{L}{mr^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2}}} \\ &= \pm \int_{r_0}^r \frac{L}{\sqrt{2m} r^2} \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2}}} \Rightarrow \varphi(r) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion liefert $r = r(\gamma)$

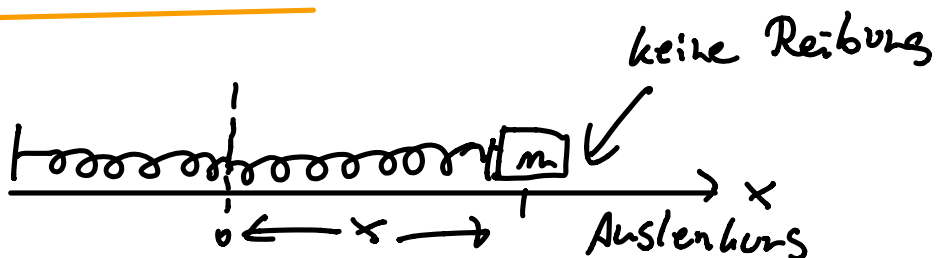
D.h. die Bahnkurve ist vollständig bestimmt,
falls Integrationskonstanten r_0, γ_0 und
 E, L bekannt.

3. Schwingungen

3.1 Einfache harmonische Schwingungen

Schwingungen entstehen, wenn ein System aus dem Gleichgewicht ausgelenkt (d.h. gestört) wird.

Horizontale Federn:



a) Alle wirkenden Kräfte auflisten: hier nur Federkraft

$$\vec{F} = \vec{F}_x = -R x$$

↑

Federkonstante

Eigenschaft der Feder

"Hooke'sches Gesetz"

b) Bewegungsgleichung mit Hilfe des 2. Newton'schen Gesetzes herleiten:

$$\vec{F}_x = m a_x = m \dot{v}_x = m \ddot{x}$$

D.h.

$$m \ddot{x} = -R x$$

Differentialgleichung (Dgl.)
2. Ordnung

Ziel: $x(t)$ bestimmen !